Aufgabe 1

Berechnen Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen, falls diese existieren.

a) $a_n = \frac{n^3+3n+3}{n^4+n^2+1}$

b) $b_n = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}\cdot n)}{n+1}$

c) $c_n = a_n + b_n$

d) $d_n = a_n - 10$

e) $e_n = a_n \cdot d_n$

f) $x_n = \frac{b_n}{a_n}$

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Bringen Sie dazu den Nenner der rechten Seite auf die linke Seite und multiplizieren Sie anschließend aus.

b) Leiten Sie aus *a*) den Grenzwert der geometrischen Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ für $|q| < 1$ ab.

Aufgabe 3

Sind die folgenden Reihen konvergent?

a) $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i$

b) $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \quad \text{mit } 0 \leq a_i \leq q^i \text{ und } q < 1$

c) $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i$

d) $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ mit $b_i \geq c$, wobei c eine feste, positive Konstante ist.

Aufgabe 4

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?

a) Ist die Folge a_n konvergent, so gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$.

b) Ist die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergent, so gilt: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1}$.

c) Ist die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergent, so gilt: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Aufgabe 5

Finden Sie zwei Zahlenfolgen a_n und b_n, für die die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ jeweils nicht konvergent sind, für die jedoch die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty}(a_i + b_i)$ trotzdem konvergent ist.