Aufgabe 1

Entscheiden Sie für folgende Funktionen jeweils, ob sie injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind:

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

b) $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$

c) $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) : x \mapsto |x|$

d) $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) : x \mapsto \sqrt{x}$

e) $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$

f) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2 \cdot x + 3.$

Aufgabe 2

Sind die untenstehenden Zahlenfolgen arithmetische bzw. geometrische Folgen?

a) $a_n = n$

b) $b_n = 2^n$

c) $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

d) $d_n = \exp(n)$

e) $x_0 = 10; \quad x_{n+1} = 2 \cdot x_n$

f) $y_0 = 1; \quad y_1 = 2; \quad y_{n+2} = y_n + y_{n+1}.$

Aufgabe 3

Geben Sie für folgende Zahlenfolgen jeweils eine untere und eine obere Schranke an, falls eine solche existiert:

a) $a_n = (-1)^n$

b) $b_n = \ln(n + 1)$

c) $c_n = 1 - \exp(-n).$

Aufgabe 4

Entscheiden Sie für die untenstehenden Zahlenfolgen jeweils, ob sie monoton bzw. beschränkt sind:

a) $a_n = n$

b) $b_n = (-1)^n \cdot n$

c) $c_n = \frac{1}{n^2+1}$

d) $d_n = 2 + \frac{1}{n+1}$

e) $e_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}$

f) $x_0 = 1; \quad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \cdot x_n.$

Aufgabe 5

a) Sei a_n eine Zahlenfolge, die gegen den Grenzwert 1 konvergiert, d.h. es gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad |1 - a_n| < \varepsilon.$$

Wie kann man diese formale Definition verbalisieren?[1]

b) Die untenstehenden Aussagen charakterisieren die Eigenschaft der Zahlenfolge a_n, gegen den Grenzwert 1 zu konvergieren, **nicht.** Überlegen Sie sich beispielhaft Zahlenfolgen, die die untenstehenden Eigenschaften jeweils erfüllen, jdoch nicht gegen den Grenzwert 1 konvergieren:

(a) Für $\varepsilon = 1$ liegen ab einem Index n_0 alle Glieder der Zahlenfolge in der ε - Umgebung des Wertes 1.

(b) In jeder noch so kleinen ε - Umgebung um den Wert 1 liegen unendlich viele Glieder der Zahlenfolge a_n.

(c) Der Abstand der Glieder der Zahlenfolge zum Wert 1 wird immer geringer.

[1]Sie können hier den Begriff der ε - Umgebung benutzen: Die ε - Umgebung um einen Wert a ist die Menge aller rellen Zahlen x die von a einen Abstand haben, der kleienr ist als ε.