Aufgabe 1

Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion

$$f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto x_1 \cdot x_2 + \exp(x_3 + x_4) - x_5 \cdot (x_1^2 - 2 \cdot x_3).$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Jacobimatrix der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 \cdot x_3 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 - \ln(x_3) + \sqrt{x_1 \cdot (x_2 - x_3)} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^4 \cdot \ln(1 + x_2^2).$$

a) Welche Werte kann die Funktion f annehmen?

b) Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion f.

c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix der Funktion f.

d) Untersuchen Sie die Funktion f auf lokale Extrema. Betrachten Sie dabei auch explizit hinreichende Bedingungen.

e) Begründen Sie ohne Verwendung von *b*) bis *d*), sondern ausschließlich unter Verwendung von *a*), dass an jeder Stelle $x = (x_1, x_2)$ mit $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$ ein globales Minimum vorliegt.

f) Gibt es weitere Minima außer den in *e*) genannten?

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \exp(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

a) Welche Werte kann die Funktion f annehmen?

b) Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion f.

c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix der Funktion f.

d) Wie lautet die Hesse Matrix an der Stelle $x = (0, 0, 0)$?

e) Untersuchen Sie die Funktion f auf lokale Extrema. (Auf die Prüfung hinreichender Kriterien kann hier verzichtet werden.)