Gegeben seien die Vektoren und Matrizen

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie A^T.
b) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle a, b \rangle$.
c) Berechnen Sie die Normen der Vektoren a und b.

Aufgabe 2

Gegeben seien die beiden Vektoren $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Sind die Vektoren u und v orthogonal?
b) Finden Sie einen (vom Nullvektor verschiedenen) Vektor $w \in \mathbb{R}^3$, der sowohl senkrecht auf u, als auch senkrecht auf v steht.

Aufgabe 3

Gegeben sei der Vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_{\neq 0}$ mit den von Null verschiedenen Einträgen v_1 und v_2.

a) Für welche Vekturen $y \in \mathbb{R}^1$ ist das Gleichungssystem $v^T v x = y$ lösbar und wie lautet die Lösungsmenge in diesen Fällen?
b) Für welche Vekturen $y \in \mathbb{R}^2$ ist das Gleichungssystem $v v^T x = y$ lösbar und wie lautet die Lösungsmenge in diesen Fällen?

Aufgabe 4

a) Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem $Ax = d$.
b) Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem $Bx = b$.
c) Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem $Cx = c$.

Aufgabe 5

Ist die folgende Aussage wahr? (Begrüdung!):
Steht ein Vektor v_1 senkrecht auf einem Vektoir v_2 der selbst wieder senkrecht auf einem Vektor v_3 steht, so sind stets auch die Vektoren v_1 und v_3 senkrecht zueinander.