Aufgabe 26 (Kettenregel, Totales Differential)

Betrachten Sie die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ \frac{x_2}{x_3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 + y_2 \\ \sin(y_1) \\ \ln(y_2) \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Jacobimatrix der Verkettung $g \circ f$, indem Sie zunächst die Jacobimatrix von f und g berechnen und anschließend die Kettenregel anwenden.

b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie zunächst die verkettete Funktion $g \circ f$ berechnen und dann die entsprechende Jacobimatrix hiervon bestimmen.

c) Wie verändert sich der Funktionswert von $g \circ f$ bei einer geringfügigen Veränderung von 0.05 Einheiten parallel zur x_1-Achse, 0.1 Einheiten parallel zur x_2-Achse und 0.02 Einheiten parallel zur x_3-Achse und einem konkretem Ausgangspunkt von $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -1)$?

Aufgabe 27 (Optimierung unter Nebenbedingungen)

Ein EDV-Hersteller produziert zwei Typen von Druckern. Die Gesamtkostenfunktion sei

$$K(x, y) = 2x^2 + 4y^2 + 2xy + 10$$

wobei x die Menge der produzierten Drucker des Typs X sei und y die des Typs Y. Sie wollen nun 16 Drucker (egal welchen Typs) zu möglichst niedrigen Kosten produzieren. Wie viele Durcker vom Typ X und wie viele vom Typ Y stellen Sie her?

a) Formulieren Sie das entsprechende Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen.

b) Lösen Sie das Problem unter Verwendung der...

(i) ... Substitutionsmethode

(ii) ... Lagrangemethode

(iii) ... Tangentialmethode