Das Rasch-Modell und seine zentralen Eigenschaften

Stella Bollmann

Seminar *Psychometrische Modelle: Theorie und Anwendungen*
Institut für Statistik, LMU München

München, 27. Mai 2014

Gliederung

Gliederung

Gliederung

Gliederung

Die klassische Testtheorie

- Personen werden im Vergleich zu ihrer Gruppe gesehen
- Summenwert über alle Items stellt wahren Wert plus Fehler dar:

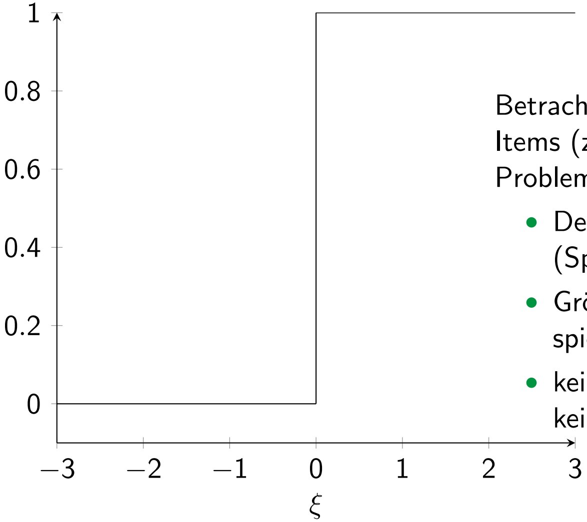
$$x_{ga} = \tau_{ga} + e_{ga}$$

- Annahmen: metrische Daten, Normalverteilung, linearer Zusammenhang

Probleme:

- Voraussetzungen fast nie gegeben
- Kennwerte stichprobenabhängig

Vorschlag: Guttman-Modell



Betrachtung von dichotomen Items (z.B. Intelligenztest)
Probleme:

- Deterministische Funktion (Sprungfunktion)
- Größe des Unterschieds spielt keine Rolle
- kein statistisches Modell da kein Zufall

probabilistisches Modell

- kein Determinismus
- probabilistischer Zusammenhang von Itemlösung und Personenfähigkeit

$$\mathbb{P}(\text{Person mit Fähigkeit } \xi \text{ löst Item i}) = \mathbb{P}\,(+|i\,,\,\xi\,) = \;f_i\,(\xi)$$

mit $f_i(\xi) =$ nicht-lineare Funktion

Das Rasch-Modell
Grundidee

der Test sollte folgende Eigenschaften haben:

1. alle Aufgaben sprechen selbe Eigenschaft ξ an $\Rightarrow$ Homogenität
2. Aufgabencharakteristik $f_i(\xi)$ monoton steigend und

   $$f_i(\xi) \neq 0, \neq 1; \lim_{\xi\to-\infty} f_i(\xi) = 0; \lim_{\xi\to\infty} f_i(\xi) = 1$$

3. lokale stochastische Unabhängigkeit vorausgesetzt
4. Zahl der gelösten Items ist suffiziente Statistik für Leistungsparameter ξ

Das Rasch-Modell

Grundidee

der Test sollte folgende Eigenschaften haben:

1. alle Aufgaben sprechen selbe Eigenschaft ξ an $\Rightarrow$ Homogenität
2. Aufgabencharakteristik $f_i(\xi)$ monoton steigend und

   $$f_i(\xi) \neq 0, \neq 1; \lim_{\xi \to -\infty} f_i(\xi) = 0; \lim_{\xi \to \infty} f_i(\xi) = 1$$

3. lokale stochastische Unabhängigkeit vorausgesetzt
4. Zahl der gelösten Items ist suffiziente Statistik für Leistungsparameter ξ

lokale stochastische Unabhängigkeit

Formalisierung in probabilistischer Testtheorie:

$$f_{ij}(\xi) = f_i(\xi) \cdot f_j(\xi) \tag{1}$$

Formalisierung in KTT:

$$\rho(E_i, E_j) = 0 \tag{2}$$

bzw. je homogener eine Stichprobe desto geringer Korrelationen zwischen Items

Das Rasch-Modell

Grundidee

der Test sollte folgende Eigenschaften haben:

1. alle Aufgaben sprechen selbe Eigenschaft ξ an $\Rightarrow$ Homogenität
2. Aufgabencharakteristik $f_i(\xi)$ monoton steigend und

   $$f_i(\xi) \neq 0, \neq 1; \lim_{\xi \to -\infty} f_i(\xi) = 0; \lim_{\xi \to \infty} f_i(\xi) = 1$$

3. lokale stochastische Unabhängigkeit vorausgesetzt
4. Zahl der gelösten Items ist suffiziente Statistik für Leistungsparameter ξ

Das Rasch-Modell

Grundidee

Notation:

ξ_v Personenparameter $(v = 1, \ldots, n)$

σ_i Itemparameter $(i = 1, \ldots, k)$

$n =$ Anzahl der Personen, die Test bearbeitet haben

$k =$ Anzahl der Items im Test

Das Rasch-Modell

Grundidee

1. Wie fließt Itemschiwierigkeit in Funktion ein?

2. Wie wird aus dieser latenten Differenz Lösungswahrscheinlichkeit gemacht?

Das Rasch-Modell

Grundidee

1. Wie fließt Itemschiwierigkeit in Funktion ein?
   $\mathbb{P}\left(+|\sigma\ ,\ \xi\ \right) =\ f_i\left(\xi - \sigma\right)$
2. Wie wird aus dieser latenten Differenz Lösungswahrscheinlichkeit gemacht?

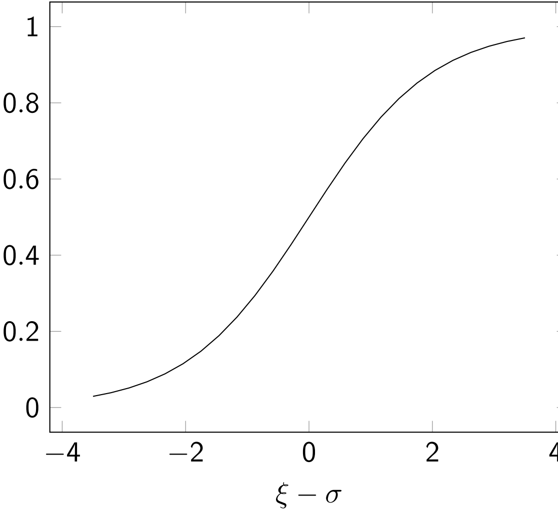
   $\Rightarrow$ mit der logistischen Funktion $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

   2.1 Streng monotone Abbildung, stetig, differenzierbar
   2.2 Ausgangswert (x) zwischen $-\infty$ und $+\infty$
   2.3 Ergebnis (f(x)) stetig aber nur zwischen 0 und 1

Die logistische Funktion

für eine Person und ein Item:

$$F(\xi-\sigma) = \frac{exp(\xi-\sigma)}{1+exp(\xi-\sigma)}$$



Monotonieeigenschaft

- strenge Monotonie: für zwei verschiedene Werte der Parameterdifferenz nimmt Lösungswahrscheinlichkeit auch verschiedene Werte an
- doppelte Monotonie: Lösungswahrscheinlichkeit ist monoton mit sowohl ξ_v als auch σ_i verknüpft
- ändert sich einer der Parameter, ändert sich auch die Lösungswahrscheinlichkeit

zentrale Eigenschaften des Rasch-Modells

1. suffiziente Statistik
2. Parameterseparierbarkeit
3. spezifische Objektivität

Gliederung

Suffiziente Statistik

$a_{v0} = \sum_{i=1}^{k} a_{vi}$ ist suffiziente Statistik für Personenfähigkeit bzw.

$a_{0i} = \sum_{v=1}^{n} a_{vi}$ ist suffiziente Statistik für Itemschwierigkeit

$+$ die Likelihood der gesamten Datenmatrix hängt nur von den Parametern und von den Randsummen, aber nicht vom Inneren der Matrix ab

$\Rightarrow$ wenn alle Randsummen bekannt, enthalten Daten keine weitere Info, die relevant ist zur Schätzung der Parameter

Gliederung

Parameterseparierbarkeit

1. Schätzung der Itemparameter unabhängig von Personenparametern, da $L = P(a_{0i}|a_{v0})$ unabhängig von Personenparametern

2. Schätzung der Personenparameter unabhängig von Itemparametern, da $L = P(a_{v0}|a_{0i})$ unabhängig von Itemparametern

3. gemeinsame Verteilung aller Bernoulli Variablen aller Einträge ist unabhängig von allen Parametern, da $P(A|a_{v0}, a_{0i}, \xi, \sigma) = const.$

Parameterseparierbarkeit

1. Schätzung der Itemparameter unabhängig von Personenparametern, da $L = P(a_{0i}|a_{v0})$ unabhängig von Personenparametern
   $\Rightarrow$ Anwendung in cML-Schätzung
2. Schätzung der Personenparameter unabhängig von Itemparametern, da $L = P(a_{v0}|a_{0i})$ unabhängig von Itemparametern
3. gemeinsame Verteilung aller Bernoulli Variablen aller Einträge ist unabhängig von allen Parametern, da $P(A|a_{v0}, a_{0i}, \xi, \sigma) = const.$

Parameterseparierbarkeit

1. Schätzung der Itemparameter unabhängig von Personenparametern, da $L = P(a_{0i}|a_{v0})$ unabhängig von Personenparametern
   $\Rightarrow$ Anwendung in cML-Schätzung
2. Schätzung der Personenparameter unabhängig von Itemparametern, da $L = P(a_{v0}|a_{0i})$ unabhängig von Itemparametern
3. gemeinsame Verteilung aller Bernoulli Variablen aller Einträge ist unabhängig von allen Parametern, da $P(A|a_{v0}, a_{0i}, \xi, \sigma) = const.$
   $\Rightarrow$ Anwendung für exakte Tests *(Modelltestung)*

Gliederung

spezifische Objektivität

Vergleich zweier Items:

dazu: Untersuchung der Personen, die genau eines der beiden Items gelöst haben
Aus der Parameterseparierbarkeit folgt

$$\frac{exp(-\sigma_1)}{exp(-\sigma_2)} = \frac{n_{12}}{n_{21}}$$

mit: $n=$ Anzahl der Personen, die genau ein Item gelöst haben,
$n_{12}=$ Anzahl der Personen, die nur das erste Item gelöst haben,
$n_{21}=$ Anzahl der Personen, die nur das zweite Item gelöst haben

d.h. der Unterschied zweier Items hängt nur von der Anzahl der gelösten Items ab

spezifische Objektivität

Unterschied zwischen Itemparameter unabhängig davon, welche Person es gelöst hat (=*Stichprobenunabhängigkeit*)

genauso: Unterschied zwischen Personenparameter unabhängig davon, welche Items gelöst wurden (Itemseparierbarkeit)

außerdem: Unterschied zweier Personenparameter unabhängig von den anderen Personen
+ Unterschied zweier Itemparameter unabhängig von den anderen Items

Parameterschätzung

- unconditional maximum likelihood (uML)
- marginal maximum likelihood (mML)
- conditional maximum likelihood (cML)

Gliederung

unconditional maximum likelihood (uML)

auch "joint ML genanntälle Parameter werden gleichzeitig geschätzt

$\Rightarrow$ Neyman-Scott Problem

Gliederung

marginal maximum likelihood (mML)

Versuch der Lösung des Nyman-Scott-Problems
Annahme der Normalverteilung der Personenfähigkeit
Weniger zu schätzende Parameter, aber verzerrte Schätzung

Gliederung

conditional maximum likelihood (cML)

Anwendung der Parameterseparierbarkeit

Normalverteilung muss nicht gegeben sein
+ Nyman-Scott-Problem gelöst

Item- und Personenparameter werden getrennt geschätzt
Vorteil: keine Verteilungsannahme, unverzerrte Schätzung, auf Repräsentativität kann bei Parameterschätzung verzichtet werden

Anhang

Likelihood einer Matrix mit den selben Randvektoren

$$L = P(A|\theta, \epsilon) = \frac{\prod\limits_{v} \theta_v^{a_{v0}} \prod\limits_{i} \epsilon_i^{a_{0i}}}{\prod\limits_{v} \prod\limits_{i} (1+\theta_v \epsilon_i)}$$

spezifische Objektivität

Vergleich zweier Items:

dazu: Untersuchung der Personen, die genau eines der beiden Items gelöst haben
Aus der Parameterseparierbarkeit folgt mit:

$$n\frac{exp(-\sigma_2)}{exp(-\sigma_1)+exp(-\sigma_2)} = n_{21} \text{ und } n\frac{exp(-\sigma_1)}{exp(-\sigma_1)+exp(-\sigma_2)} = n_{12}:$$

$$\frac{exp(\sigma_1)}{exp(\sigma_2)} = \frac{n_{12}}{n_{21}}$$

mit: $n=$ Anzahl der Personen, die genau ein Item gelöst haben,
$n_{12}=$Anzahl der Personen, die nur das erste Item gelöst haben,
$n_{21}=$Anzahl der Personen, die nur das zweite Item gelöst haben

d.h. der Unterschied zweier Items hängt nur von der Anzahl der gelösten