

Aufgabe 4 (frei nach R.A. Fisher (1935). The Design of Experiments. Oliver and Boyd publishers.)

Eine Lady, die täglich um 17 Uhr ihren Tee serviert bekommt, behauptet, sie würde am Geschmack erkennen, ob bei dem ihr servierten Tee zuerst die Milch und dann der Tee eingegossen wurde oder umgekehrt. Tee, bei dem die Milch zuerst in der Tasse war, schmecke ihr nicht, und sie ließe diesen Tee sofort stehen.

Lord Peter, der die Lady als wichtige Zeugin in einem Mordfall benötigt, muss sich entscheiden, ob er die Lady als glaubwürdig einstuft oder nicht. Um die Lady auf die Probe zu stellen, besticht er das Küchenmädchen und fordert dieses auf, an drei aufeinanderfolgenden Tagen die Reihenfolge des Füllens der Tassen zufällig festzulegen, den entsprechenden Tee zu servieren und die Reaktion der Lady zu beobachten. Danach solle sie ihm mitteilen, an wie vielen der drei Tagen die Lady die Füllreihenfolge richtig erkannt hat.

- (a) Formulieren Sie Lord Peters Entscheidungsproblem als Testproblem (im entscheidungstheoretischen Kontext) mit den Hypothesen

H_0 : Die Lady rät nur, ist also unglaubwürdig.

H_1 : Die Lady erkennt tatsächlich mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% die wahre Reihenfolge, ist also glaubwürdig.

und der Verlustfunktion, die richtigen Entscheidungen den Verlust 0 und falschen Entscheidungen den Verlust 1 zuordnet! Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

- (i) Rekapitulieren Sie das entsprechende datenfreie Entscheidungsproblem! Beschränken Sie sich dabei auf reine (also unrandomisierte) Aktionen.
 - (ii) Formulieren Sie die Informationsstruktur (das statistische Modell) des zugehörigen datengestützten Entscheidungsproblems!
 - (iii) Bestimmen Sie das zugehörige Auswertungsproblem! Beschreiben Sie dabei die (unrandomisierten) Entscheidungsfunktionen als Tests mit zugehörigem Ablehn- und Annahmehereich sowie der Fehlerwahrscheinlichkeit erster und zweiter Art.
- (b) Bestimmen Sie die Minimax-Aktion des Auswertungsproblems (d.h. den optimalen Test nach dem Minimax-Entscheidungskriterium für die vorliegende Situation)!
- (c) Geben Sie sich nun ein Signifikanzniveau α von 30% vor! Welcher der Niveau- α -Tests für die vorliegende Situation ist optimal im Sinne einer minimalen Fehlerwahrscheinlichkeit zweiter Art?
- (d) Diskutieren Sie die in (b) und (c) erhaltenen Tests aus statistischer Perspektive! Welcher Test erscheint Ihnen für die vorliegende Situation sinnvoller?
- (e) Nehmen Sie nun an, Lord Peter habe bereits Vorwissen über die Fähigkeiten der Lady, welches in der Priori-Verteilung $\pi = (0.6, 0.4)^T$ ausgedrückt wird. Bestimmen Sie die zur Priori-Verteilung π optimale Aktion des Auswertungsproblems (d.h. den optimalen Test nach dem Bayes-Entscheidungskriterium zur Priori-Verteilung π für die vorliegende Situation)!

Formalitäten:

- Die Abgabefrist ist Montag, der 30. Juni 2014, 23:59 Uhr (MESZ).
- Bitte senden Sie Ihre Lösung (fristgerecht, als Pdf-Datei " $\langle \text{Ihr Name} \rangle$ _Aufgabe4.pdf" und mit dem Betreff "[ET-Aufgabe 4]") per E-Mail an Andrea.Wiencierz@stat.uni-muenchen.de.