

Entscheidungstheorie

Prof. Dr. Th. Augustin

4. April 2014

# 1 Einführung

## 1.1 Charakterisierung der Entscheidungstheorie als Theorie des rationalen Entscheidens unter Unsicherheit

### 1.1.1 Interdisziplinäre Bedeutung und Entwicklungsstränge

a) Rational Choice

b) Expertensysteme, entscheidungsunterstützende Systeme (Decision Support Systems)

**Klir and Wierman** (Uncertainty-based Information, Physika, 1998, S.1)

For three hundred years [...] uncertainty was conceived solely in terms of probability theory. This seemingly unique connection between uncertainty and probability is now challenged [... by several other] theories, which are demonstrably capable of characterizing situations under uncertainty. [...]

[...] it became clear that there are several distinct types of uncertainty. That is, it was realized that uncertainty is a multidimensional concept. [... That] multidimensional nature of uncertainty was obscured when uncertainty was conceived solely in terms of probability theory, in which it is manifested by only one of its dimensions”.

c) Statistische Entscheidungstheorie

## 1.1.2 Grundlegende Typen von Entscheidungsmodellen

## 1.2 Die Grundform eines datenfreien Entscheidungsproblems (No-data-Problem)

### Def. 1.1 (Datenfreies Entscheidungsproblem)

Ein *datenfreies Entscheidungsproblem* (no-data-problem) in Nutzenform (Verlustform) ist ein Tripel  $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$  bzw.  $(\mathbb{A}, \Theta, l(\cdot))$ , bestehend aus

- einer Menge  $\mathbb{A}$  („*Aktionenmenge*“),
- einer Menge  $\Theta$  („*Zustandsmenge*“)

- und einer Abbildung („*Nutzenfunktion*“) ( $u \hat{=} \text{utility}$ )

$$\begin{aligned} u : \mathbb{A} \times \Theta &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, \vartheta) &\mapsto u(a, \vartheta) \end{aligned} \tag{1.1}$$

bzw. einer Abbildung („*Verlustfunktion*“) ( $l \hat{=} \text{loss}$ )

$$\begin{aligned} l : \mathbb{A} \times \Theta &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, \vartheta) &\mapsto l(a, \vartheta) \end{aligned} \tag{1.2}$$

## Bsp. 1.2 (Das „Omelettenproblem“ von Savage)



### Bem. 1.3 (Konsequenzenfunktion)

Für manche Anwendungen ist es sinnvoll, einen Schritt dazwischenzuschalten und – bei gegebenem  $\mathbb{A}$  und  $\Theta$  – zunächst eine *Konsequenzenfunktion*

$$c : \mathbb{A} \times \Theta \rightarrow \mathcal{C}$$

$$(a, \vartheta) \mapsto c(a, \vartheta)$$

(mit  $\mathcal{C}$  ist die Menge potentieller Konsequenzen) zu betrachten und darauf eine Nutzenbewertung

$$u_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$c \mapsto u_{\mathcal{C}}(c)$$

bzw. eine Verlustbewertung

$$l_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$l \mapsto l_{\mathcal{C}}(c)$$

festzulegen.

$u(\cdot)$  und  $l(\cdot)$  ergeben sich dann durch Superposition beider Funktionen als

$$u(a, \vartheta) = u_{\mathcal{C}}(c(a, \vartheta))$$

bzw.

$$l(a, \vartheta) = l_{\mathcal{C}}(c(a, \vartheta))$$

## Bem. 1.4 (zu Nutzen- und Verlustfunktionen)

- In Definition (1.1) haben Verlust- und Nutzenfunktion (als Funktionen der Gestalt  $\mathbb{A} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ ) formal genau dieselbe Struktur. Es muss also jeweils dazugesagt werden, was vorliegen soll. (Nutzen: Je mehr, umso besser; Verlust: Je weniger, umso besser)
- Diese Uneindeutigkeit liegt nicht zuletzt daran, dass man eigentlich mit *Präferenzordnungen* auf der Menge der Konsequenzen als grundlegende Entität arbeiten müsste. Die Nutzentheorie lehrt, wie man unter welchen Bedingungen aus Präferenzordnungen einen kardinalen (metrischen) Nutzen konstruiert. (Hier nur eventuell am Ende der Vorlesung betrachtet. )

- Die Kardinalität des Nutzens wird (zunächst) nicht bezweifelt; man kann also mit den Nutzeinheiten wie gewohnt rechnen. Insbesondere wird dem Folgenden eine Äquivalenz von Nutzen- und Verlustsicht unterstellt: durch Multiplizieren mit  $(-1)$  kann man dann jede Nutzenfunktion  $u(\cdot)$  in eine, genau dieselbe Präferenzordnung widerspiegelnde Verlustfunktion umwandeln. Daher wird im Folgenden meist nur entweder von Nutzen- oder von Verlustfunktion gesprochen.

### Bem. 1.5 (Notation im endlichen Fall; Einbettung in den $\mathbb{R}^m$ )

Im Falle einer endlichen Aktionenmenge und einer endlichen Zustandsmenge wird folgende Notation verwendet:

$$\begin{aligned}\mathbb{A} &= \{a_1, \dots, a_i, \dots, a_n\} \\ \Theta &= \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_j, \dots, \vartheta_m\}\end{aligned}\tag{1.3}$$

(also  $|\mathbb{A}| = n$ ,  $|\Theta| = m$ ;  $i$  Laufindex in  $\mathbb{A}$ ,  $j$  Laufindex in  $\Theta$ )

Nutzenfunktion, Verlustfunktion und Konsequenzenfunktion können dann als Matrizen  $(u_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ ,  $(l_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ ,  $(c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$  dargestellt werden.

Zum Beispiel:

	$\mathcal{V}_1$	$\mathcal{V}_2$	..	..	$\mathcal{V}_m$
$a_1$	$u_{11}$	$u_{12}$	..	..	$u_{1m}$
$a_2$	$u_{21}$	$u_{22}$	..	..	$u_{2m}$
..	..	..	..	..	..
..	..	..	$u_{ij}$	..	..
..	..	..	..	..	..
$a_n$	$u_{n1}$	$u_{n2}$	..	..	$u_{nm}$

(1.4)

Man spricht dann von *Nutzentafel*, *Verlusttafel* oder *Konsequenzttafel*.

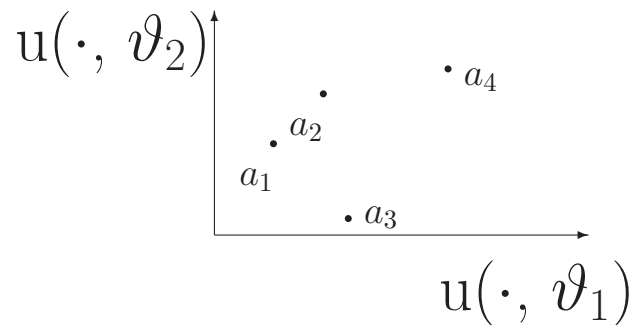
### Einbettung in den $\mathbb{R}^m$ :

Jede Aktion  $a_i \in \mathbb{A}$  kann dann mit dem zugehörigen *Nutzenvektor*

$$\vec{u}(a_i) = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ij}, \dots, u_{im})^T \in \mathbb{R}^m \quad (1.5)$$

identifiziert werden.

Ist  $m = 2$  oder  $m = 3$ , so ist ferner eine graphische Darstellung möglich:



Wird diese Sichtweise verwendet, sprechen wir von direkter Nutzen- bzw. Verlustrepräsentation.

## Bem. 1.6 (Semantik des datenfreien Entscheidungsproblems)

Abstrahiert man bei einem konkreten Entscheidungsproblem und fasst es in die Form  $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$  bzw.  $(\mathbb{A}, \Theta, l(\cdot))$  laut Definition 1.1, so sind damit implizit die folgende Reihe von grundsätzlichen Annahmen verbunden, die in der jeweiligen Anwendung kritisch zu hinterfragen sind:

a)  $\mathbb{A}$  sei bekannt.

b)  $\Theta$  sei bekannt (Close-World-Assumption).



- c) Die Ergebnisse (Konsequenzen) seien eindeutig, d.h. aus dem Zusammenspiel jedes Elements  $a$  von  $\mathbb{A}$  und  $\vartheta \in \Theta$  ergibt sich eine eindeutige bestimmte Konsequenz  $c(a, \vartheta)$ . Dabei können Konsequenzen durchaus Wahrscheinlichkeitsverteilungen sein.
- d) Es läßt sich eine eindeutig bestimmte reellwertige Nutzen-/Verlustfunktion angeben, die die individuellen Präferenzen des Entscheidungsträgers vollständig widerspiegelt.
- \* Vgl. Bemerkung 1.4: Konstruktion von kardinalen (reellwertigen) Nutzenfunktionen aus bestimmte Bedingungen erfüllenden Präferenzordnungen  $\rightarrow$  „Nutzentheorie“

- \* Durchgängig wird insbesondere angenommen, dass die Präferenzen eine vollständige Ordnung erlauben und in diesem Sinn eindimensional sind/gemacht werden können.
  
- \* Es gibt also keine unterschiedlichen nichtabbildbaren „Nutzendimensionen“ (z.B. eine Diskrepanz zwischen kurz- und langfristigen Nutzen). Mehrdimensionale Nutzenbewertungen sind Gegenstand der sog. multikriteriellen Entscheidungstheorie. Es gibt auch eine Reihe von Ansätzen mit unscharfer Nutzenfunktionen.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Für eine erste Einführung vgl. z.B. Rommelfanger & Eickemeier (2001, Kap. 2.3 und 3.1.2)

- \* Der Nutzen wird dabei als abstrakte Größe gesehen, in der z.B. auch Wertdispositionen mitintegriert sind.

Aspekte wie Wertorientierung, Fairness, Reziprozität, etc. können durchaus eine Rolle spielen, sie müssen durch die Nutzenfunktion abgebildet werden bzw. abbildbar sein.

- \* Vorsicht: Bei monetären Konsequenzen ist im Allgemeinen der Nutzen nicht identisch mit (oder linear in) der Geldmenge. Nur wenn alle im Entscheidungsproblem betrachteten Geldmengen weit unterhalb des tatsächlichen Vermögensstandes sind, ist die Nutzenfunktion (praktisch) linear in den Geldbeträgen. Dies ist v.a. beim Berechnen von erwarteten Nutzen/Verlusten wichtig.

- e) Aktionen und Zustände seien wertfrei. (Eventuelle Bewertungen müssen in die Ergebnisse und damit in die Nutzenfunktion eingebaut werden.)
- f) Umwelt nicht beeinflussbar: „*Handlungsunabhängigkeit der Zustände*“  
Gegebenenfalls „Implikationsschemata“ definieren (Festlegung der Umweltzustände ist keineswegs immer trivial!)
- g) Typ der Unsicherheit bekannt (Typ I, Typ I', oder Typ II, Typ II')  
(bzw. später dann Verallgemeinerung)

- h) Keine zusätzliche Information (außer Wahrscheinlichkeit bei Typ I, Typ I'). Informationsgewinnung über Strategien formulieren → Statistische Entscheidungstheorie
  
- i) Einmalige Wahl der Entscheidung, keine Korrekturen
  
- j) Keine Wiederholung der Entscheidungssituation (wiederholte Entscheidung als eine Entscheidungsstrategie formulieren)

## 1.3 Typische Beispiele

### 1.3.1 Das Ausflugsproblem nach Chernoff & Moses (1959)

(in einer Adaption von Ferschl 1975)

- Mr. Nelson möchte morgen eine Bergwanderung unternehmen, und zwar in einer Jahreszeit, in der man mit dem plötzlichen Einfallen von Schlechtwetter zu rechnen hat

- **Handlungsmöglichkeiten:**

$a_1$  := leichte Bekleidung mitnehmen

$a_2$  := leichte Bekleidung plus Regenschirm mitnehmen

$a_3$  := wetterfeste, warme Bekleidung plus Regenschirm mitnehmen

- Die **relevanten Fakten** bzw. **Zustände** sind

$\vartheta_1$  := schönes Wetter am Ausflugstag

$\vartheta_2$  := schlechtes Wetter am Ausflugstag

- Nutzentafel für Mr. Nelson:

	$\vartheta_1$	$\vartheta_2$
$a_1$	5	0
$a_2$	3	1
$a_3$	2	3

Die Bewertungen werden als Nutzen interpretiert

Potentielle datenbasierte Zusatzinfo ( $\rightarrow$  später): Barometerablesung

### 1.3.2 Teilnahme an einer Lotterie

Gegeben sei eine Urne mit

$g$  grünen

$b$  blauen

$r$  restlichen

Kugeln. Man kann

$a_1$  nicht spielen

$a_2$  zum Preis von  $c_g$  auf grün setzen

$a_3$  zum Preis von  $c_b$  auf blau setzen.



Nun wird eine Kugel zufällig gezogen. Ist sie grün (bzw. blau), so erhält man, wenn man auf grün (bzw. blau) gesetzt hat,  $w_g$  bzw.  $w_b$  (w: win), wobei die Beträge so klein seien, dass die Linearität des Nutzens in der Geldmenge gewährleistet sei.

$\Theta = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3\}$  mit

$\vartheta_1$  gezogene Kugel ist grün

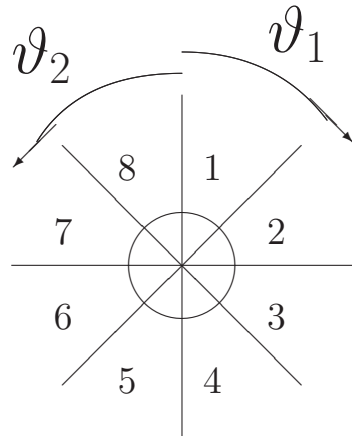
$\vartheta_2$  gezogene Kugel ist blau

$\vartheta_3$  gezogene Kugel hat sonstige Farbe

Für später wichtig: Sind  $g, b, r$  bekannt, so liegt eine Unsicherheitssituation vom Typ I (Risikosituation (i.e.S.)) vor!

### 1.3.3 „Kuchenteilen“

Gegeben sei ein Kuchen aus 8 durchnummerierten gleich großen Stücken.



- Der Entscheidungsträger wählt ein Stück  $z$ ,  $z \in \{1, \dots, 7\}$ , bei dem der Kuchen geteilt wird.
- Es gebe zwei Umweltzustände:  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$ . Tritt  $\vartheta_1$  ein, so erhält der Entscheidungsträger die Stücke 1 bis  $z$ , bei  $\vartheta_2$  hingegen die Stücke  $z + 1$  bis 8.

	$\vartheta_1$	$\vartheta_2$
1	1	7
2	2	6
3	3	5
4	4	4
5	5	3
6	6	2
7	7	1

Nutzen = Anzahl Stücke! Nichtsättigung

- Es wird hier noch nichts vorausgesetzt, wie die Umweltzustände eintreten. Werden sie z.B. durch einen Gegenspieler erzeugt, so erhält man ein typisches Beispiel für die Situation des strategischen Spiels, also für Typ II - Unsicherheit

### 1.3.4 Investitionsproblem

Ein Unternehmen steht vor der Entscheidung, eine Marketing-Investition zu tätigen. Ihr Erfolg hängt von der Konjunkturlage im nächsten Halbjahr ab.

- **Aktionen:**

$a_1$  := Investition tätigen

$a_2$  := Investition nicht tätigen

- **Zustände:**

$\vartheta_1 :=$  Steigende Konjunktur

$\vartheta_2 :=$  Stagnation

$\vartheta_3 :=$  Konjunktur fällt

	$\vartheta_1$	$\vartheta_2$	$\vartheta_3$
$a_1$	10000	2000	-15000
$a_2$	1000	1000	0