2 Entscheidungskriterien

2.1 Vorbereitende Überlegungen

Entscheidungsregeln – Entscheidungsprinzipien

Bem. 2.1 (Entscheidungsregeln und Entscheidungsprinzipien)

- Eine Menge ist *linear geordnet* bzw. eine Ordnung $\prec$ ist *vollständig*, wenn für zwei Elemente a, b stets gilt

  $$a \prec b \text{ oder } a \succ b \text{ oder } a \sim b. \qquad (\sim : \text{äquivalent})$$

  Beispiele:
  $\mathbb{R}$ ist bezüglich der üblichen Ordnung vollständig geordnet, aber $\mathbb{R}^n$ etwa bezüglich der komponentenweisen Ordnung nicht.

- Mit *Entscheidungsregeln* bringt man die Aktionen in eine vollständige, lineare Ordnung
  - + Ist der Aktionenraum endlich, dann gibt es „größte“/ „beste“ Aktionen.
  - – Allerdings: Für die konkrete Gestalt von Entscheidungsregeln gibt es i.a. keinen universalen Gültigkeitsanspruch.
- *Entscheidungsprinzipien* sind Grundsätze für die Auswahl von Aktionen, die beanspruchen, allgemeine Rationalitätsprinzipien zu sein.
  Dafür ist ihre „Ordnungskraft“ nicht so stark: Man wird im Allgemeinen nur gewisse ungünstige Aktionen als „unzulässig“ ausschließen können.

- Später werden wir sehen: Entscheidungs*prinzipien* sind unabhängig vom Unsicherheitsverständnis (ob Typ I oder Typ II), die Entscheidungs*regeln* hingegen nicht.

Zulässigkeit und Dominanzprinzip

Def. 2.2 (Dominanzrelationen)

Seien a_1, $a_2 \in \mathbb{A}$.

a) a_1 *dominiert* a_2 $\iff$

$$u(a_1, \vartheta) \geq u(a_2, \vartheta) \qquad \text{für alle } \vartheta \in \Theta.$$

Man schreibt:

$$\boxed{a_1 \succeq a_2}$$

b) a_1 *dominiert* a_2 *strikt* $\iff$

$$u(a_1, \vartheta) \geq u(a_2, \vartheta) \qquad \text{für alle } \vartheta \in \Theta.$$

und

$$u(a_1, \vartheta) > u(a_2, \vartheta) \qquad \text{für mindestens ein } \vartheta \in \Theta.$$

Man schreibt:

$$\boxed{a_1 \succ a_2}$$

c) *a_1 dominiert a_2 stark* $\Longleftrightarrow$

$$u(a_1, \vartheta) > u(a_2, \vartheta) \qquad \text{für alle } \vartheta \in \Theta$$

Man schreibt:

$$\boxed{a_1 \succ\succ a_2}$$

d) a_1, a_2 sind *äquivalent* $\Longleftrightarrow$

$$a_1 \succeq a_2 \quad \text{und} \quad a_2 \succeq a_1$$

Man schreibt:

$$\boxed{a_1 \sim a_2}$$

- Für äquivalente Aktionen gilt:

$$a_1 \sim a_2 \quad \Longleftrightarrow \quad u(a_1, \vartheta) = u(a_2, \vartheta) \qquad \text{für alle } \vartheta \in \Theta$$

- Gemäß der in Bem. 1.6 postulierten Äquivalenz von Nutzen- und Verlustsicht kehren sich bei Verlusttafeln die „Vorzeichen“ in Def. 2.2 a) bis c) einfach um, z.B.:

$$a_1 \succeq a_2 \quad \Longleftrightarrow \quad l(a_1, \vartheta) \leq l(a_2, \vartheta) \qquad \text{für alle } \vartheta \in \Theta$$

- Die Dominanzrelationen gelten i.A. nicht für beliebige Paare von Aktionen: sie sind *nicht vollständig*. Sie liefern jedoch eine Klasseneinteilung der Aktionen.

Def. 2.3

Eine Aktion $a \in \mathbb{A}$ heißt *admissibel (zulässig)* $\Longleftrightarrow$

a wird von keiner Aktion strikt dominiert.

Die Aktion $a \in \mathbb{A}$ heißt *inadmissibel (unzulässig)* $\Longleftrightarrow$

Es gibt eine Aktion a', so dass $a' \succ a$.

Bem. 2.4 (Potentielle Inadmissibilität beim Übergang zur gemischten Erweiterung)

Vorsicht: Man kann bereits an einfachen Beispielen sehen, dass beim Übergang einer „reinen“ Aktionenmenge $\mathbb{A}$ zur gemischten Erweiterung $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ Aktionen, die in $\mathbb{A}$ zulässig sind, in $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ inadmissibel werden können.

Bem. 2.5 (Dominanzprinzip)

Im Folgenden werden zwei äquivalente Formulierungen gegeben:

> Dominiert die Aktion a_1 die Aktion a_2 strikt, das heißt, gilt:
>
> $$a_1 \succ a_2 \,,$$
>
> so ist es nicht vernünftig, die Aktion a_2 zu wählen.

oder:

> Es ist nicht vernünftig, eine inadmissible Aktion zu wählen.

Bem. 2.6

Das Dominanzprinzip ist das Rationalitätsprinzip der hier zugrunde gelegten Form der Entscheidungstheorie schlechthin.

Die in Bemerkung 2.5 der getroffenen Grundannahmen der Gültigkeit des Dominanzprinzips kann man somit als Test für das Zutreffen des hier verwendeten Modellierungsrahmen ansehen.
Hat man bei der Betrachtung einer Entscheidungstafel das Gefühl, dass die Allgemeingültigkeit des Dominanzprinzips bezweifelt werden kann, muss man prüfen, ob nicht grundlegende Annahmen wie insbesondere die Handlungsunabhängigkeit der Zustände verletzt sind.

Def. 2.7 ((Wesentlich) vollständige Klassen)

a) Eine Teilmenge $\mathbb{C} \subset \mathbb{A}$ heißt *vollständig (complete)* $\Longleftrightarrow$
Für jede Aktion $a \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$ gibt es ein $a^* \in \mathbb{C}$, so dass

$$a^* \succ a$$

b) Eine Aktionenmenge $\mathbb{C} \subset \mathbb{A}$ heißt *wesentlich vollständig (essentially complete)* $\Longleftrightarrow$
Zu jeder Aktion $a \in \mathbb{A}$ (oder $\mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$) gibt es ein $a' \in \mathbb{C}$, so dass

$$a' \succeq a\,.$$

c) Eine vollständige Klasse $\mathbb{C}_{\min}$ heißt *minimal vollständige Klasse* $\Longleftrightarrow$
Es gibt keine echte Untermenge von $\mathbb{C}_{\min}$, die vollständig ist.

Bem. 2.8

i) Vollständige Klassen müssen alle admissiblen Aktionen enthalten; sie können auch nicht-admissible Aktionen enthalten.

ii) Interessant sind vor allem minimale Klassen, also (wesentlich) vollständige Klassen zu denen keine Untermengen existieren, die ebenfalls (wesentlich) vollständig sind. Eine minimal vollständige Klasse ist eindeutig, minimale wesentlich vollständige Klassen kann es mehrere geben.

iii) Minimal vollständige Klassen müssen nicht existieren. Wenn eine minimal vollständige Klasse $\mathbb{C}_{\text{min}}$ existiert, dann gilt

$$\mathbb{C}_{\text{min}} = \bigcap_{\mathbb{C}\text{vollständig}} \mathbb{C}$$

und

$$\mathbb{C}_{\text{min}} = \mathbb{A}_{ad}.$$

iv) Eine minimale wesentlich vollständige Menge (keine Eindeutigkeit) bildet die weitestgehende Reduktion eines Entscheidungsproblems auf seinen „wesentlichen“Kern. Sie enthält aus jeder Äquivalenzmenge von admissiblen Aktionen genau einen Repräsentanten.

Optimalitätskriterien

Def. 2.9 (Optimalitätskriterium / Entscheidungsregel)

Gegeben sei ein datenfreies Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$.

Eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{R}^q \\ a &\mapsto \Phi(a) \end{aligned}$$

heißt *q-stufiges Optimalitätskriterium* oder *Entscheidungskriterium*.

Die Entscheidungsregel lautet dann: Suche

$$a^* \in \mathbb{A} \quad \text{mit} \quad \Phi(a^*) \geq \Phi(a) \qquad \forall a \in \mathbb{A}\,. \tag{2.1}$$

a^* heißt dann Φ-*optimale Aktion*, wobei im Fall $q \geq 2$ „$\geq$" die lexikographische Ordnung meint.

Bem. 2.10 (Nichtexistenz optimaler Aktionen)

Es muss weder eine optimale noch eine zulässige Aktion existieren.

Bem. 2.11

Es scheint mir nützlich, den Begriff der wesentlichen Vollständigkeit auch auf Optimalitätskriterien auszudehnen. Man würde dann eine Menge $\mathbb{C}_\Phi \subset \mathbb{A}$ als *wesentlich vollständig bezüglich dem Optimalitätskriterium* Φ bezeichnen, wenn es zu jedem $a \in \mathbb{A}$ ein $a' \in \mathbb{C}_\Phi$ gibt, so dass $\Phi(a') \geq \Phi(a)$.

2.2 Entscheiden unter Sicherheit

Betrachtet wird hier der Fall $|\Theta| = 1$ (bzw. die Situation $u(a, \vartheta)$ bzw. $l(a, \vartheta)$ konstant in $\vartheta \in \Theta$ für alle $a \in \mathbb{A}$). Da hier keine Unsicherheit über die Umweltzustände herrscht (bzw. der Nutzen konstant in den Umweltzuständen ist), muss man „nur“ noch diejenige(n) Aktion(en) suchen, die maximalen Nutzen liefert/liefern. Ein Problem dabei ist, dass bei den in der Praxis üblicherweise betrachteten Problemen $\mathbb{A}$ hoch dimensional ist und nur durch eine Vielzahl von Restriktionen „indirekt“ beschrieben wird. Die Aufgabe, das Maximum (Minimum) einer Funktion (hier des Nutzens) über einer bestimmten Menge (hier der Aktionenmenge) zu finden, ist ein sehr gängiges Problem, das in vielen Kontexten auftritt und deshalb eine wichtige Rolle in der numerischen Mathematik spielt (Optimierung unter Nebenbedingungen).

Wir werden im folgenden v. a. lineare Optimierungsprobleme betrachten. Die entsprechenden Techniken und Resultate erlauben nicht nur

- eine effiziente Lösung von Entscheidungsproblemen unter Sicherheit

sondern bilden auch

- eine wesentliche Grundlage zur mathematischen Behandlung von Entscheidungsproblemen unter Unsicherheit, wie sie in den folgenden Abschnitten betrachtet werden.

2.2.1 Grundlegendes: Lineare Optimierung

- *Optimierung*: Suche Extremstellen (Minimum, Maximum) einer Funktion $f : D_1 \to \mathbb{R}$, über einer Menge $D_2 \subseteq D_1$. Dabei

  ∗ wird jetzt $f(\cdot)$ meist als *Zielfunktion* bezeichnet, und

  ∗ D_2 ergibt sich über „*Restriktionen, Nebenbedingungen*“

- *lineare Optimierung, lineare Programmierung*:
  sowohl $f(\cdot)$ als auch die D_2 beschreibende Nebenbedingungen sind *linear* in den Komponenten („Variablen") $\vec{x} \in D_1$

- *endliche lineare Optimierung* (hier im folgenden vorausgesetzt)

  * $D_1 \subseteq \mathbb{R}^m$; $m < \infty$: die Anzahl der Variablen ist endlich.

  * die Anzahl der linearen Nebenbedingungen ist endlich. Damit ist D_2 eine polyedrische Menge bzw. meist ein konvexes Polyeder.

2.2.2 Typische Beispiele und Problemstellung

Bsp. 2.12 (Produktionsplanung)

Maximiere Gesamtgewinn aus verschiedenen Produkten unter Restriktionen an

- Produktmenge (Lagermenge, Transportmenge)
- Produktionskapazität
- Ressourcenmenge

bei als fest angenommenem Preis und unbegrenztem Absatz.

Etwa im Beispiel 1.17. Ist beispielsweise bekannt, dass je Mengeneinheit von Produkt 1 ein Gewinn von 3€ und bei Produkt 2 von 4€ pro Mengeneinheit, erzielt wird, so lautet der Ansatz zur Bestimmung des gewinnoptimalen Plans:

Bsp. 2.13 (Mischungsprobleme)

Minimiere Kosten bei Einsatz verschiedener Ressourcen unter Nebenbedingungen an einzelne Komponenten (z.B. verschiedene Düngemittel mit verschiedenen Anteilen mehrerer Nährstoffe)

Bsp. 2.14 (Investitionsplanung)

Minimiere laufende Investitionskosten unter Bedingungen an Fertigungskapazität und Investitionsbudget.

Bsp. 2.15 (Transportoptimierung und Zuordnungsprobleme)

- Verteile Einheiten kostenoptimal unter Restriktionen an Einsatzbereiche (z.B. minimiere Fahrzeiten einer Menge von Notarztwägen an verschiedenen Orten unter der Bedingung, dass alle Einsatzorte bedient werden)

- verteile Servicekräfte auf verschiedene zu bedienende Bereiche optimal hinsichtlich der benötigten Einarbeitungszeit

Diese Fragestellungen führen meist explizit auf ganzzahlige Probleme, diese werden hier nur am Rande betrachtet

2.2.3 Standard-Probleme der linearen Optimierung und ihre Lösung

Da lineare Optimierung später auf verschiedene Art verwendet wird, werden hier die Grundkonzepte allgemein besprochen. Zu maximieren/minimieren ist eine lineare Funktion $c^T w$ bei gegebenem c (z.B. Preise/Kosten) in der Variablen w über einem konvexen Polyeder der Form $R \cdot w \geqslant b$ bzw. $R \cdot w \leqslant b$, also z.B. der Ationenmenge $\mathbb{A}$.

Def. 2.16 (Standard-Minimum-Problem und Standard-Maximum Problem)

Ein Optimierungsproblem der Form

$$\underset{(1\times n)}{c^T} \cdot \underset{(n\times 1)}{w} \to \min_w \tag{2.2}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \underset{(m\times n)}{R} \cdot \underset{(n\times 1)}{w} &\geq \underset{(m\times 1)}{b} \\ \underset{(n\times 1)}{w} &\geq \underset{(n\times 1)}{0} \end{aligned} \tag{2.3}$$

heißt *Standard-Minimum-Problem*[2] (in der Variablen $w = (w[1], \ldots, w[n])^T \subseteq \mathbb{R}_0^+$ mit der Zielfunktion $c^T \cdot w$).
Jedes die Restriktionen (2.3) erfüllendes $\bar{w}$ mit $c^T \cdot \bar{w} > -\infty$ heißt

[2]Die in der Literatur verwendeten Bezeichnungsweisen sind sehr heterogen. Gleiche Begriffe können bei unterschiedlichen Autoren durchaus Verschiedenes bedeuten; dies gilt insbesondere für die Termini „Standard-Form" und „kanonische Form.

zulässig[3] oder *zulässige Lösung (des Standard-Minimum-Problems)*.

Eine zulässige Lösung w^* heißt *Optimallösung*[4] des Standard-Minimum-Problems, wenn für jedes zulässige $\bar{w}$ gilt: $c^T \cdot \bar{w} \geq c^T \cdot w^*$.

Analog heißt ein Optimierungsproblem *Standard-Maximum-Problem (in der Variablen* $w = (w[1], \ldots, w[n])^T \subseteq \mathbb{R}_0^+$ *mit der Zielfunktion* $c^T \cdot w$*)*, wenn es folgende Gestalt besitzt:

[3] Vorsicht: Leider wird hier, wie in der Literatur üblich, der Begriff Zulässigkeit in einem doppelten Sinne gebraucht. Zulässigkeit von Aktionen als nicht strikte Dominiertheit und Zulässigkeit als Verträglichkeit mit den Nebenbedingungen. Im Entscheidungsproblem unter Unsicherheit ist dabei eine zulässige Aktion im ersten Sinne bereits eine Optimallösung (Dominanz und Optimalität fallen bei $|\Theta| = 1$ zusammen); ansonsten sind aber Verwechslungen wohl ausgeschlossen.

[4] Man beachte, daß hier nur von Zulässigkeit und Optimalität gesprochen wird, wenn der zugehörige Wert $c^T \cdot w$ endlich ist.

$$\underset{(1\times n)}{c^T} \cdot \underset{(n\times 1)}{w} \rightarrow \max_{w} \tag{2.4}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \underset{(m\times n)}{R} \cdot \underset{(n\times 1)}{w} &\leq \underset{(m\times 1)}{b} \\ \underset{(n\times 1)}{w} &\geq \underset{(n\times 1)}{0}\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Jedes die Restriktionen (2.5) erfüllende $\bar{w}$ mit $c^T \cdot \bar{w} < \infty$ heißt *zulässig* oder *zulässige Lösung* (des Standard-Maximum-Problems).

Eine zulässige Lösung w^* heißt *Optimallösung* des Standard-Maximum-Problems, wenn für jedes zulässige $\bar{w}$ gilt: $c^T \cdot \bar{w} \leq c^T \cdot w^*$.

Dabei wurde von folgenden *Konventionen* Gebrauch gemacht:

1. Bei einem Vektor $y \in \mathbb{R}^q$ bezeichnet $y[\ell]$ für jedes $\ell \in \{1, \ldots, q\}$ die ℓ-te Komponente von y.

2. Für zwei Vektoren $y \in \mathbb{R}^q$ und $z \in \mathbb{R}^q$ sind die Relationen „$\leq$", „$\geq$" und „$=$" jeweils komponentenweise zu lesen. Beispielsweise gilt also:

$$y \leq z :\Longleftrightarrow y[\ell] \leq z[\ell], \qquad \forall \ell \in \{1, \ldots, q\}.$$

Bem. 2.17 (Alle Probleme können auf die Standardformen gebracht werden.)

Jede lineare Optimierungsaufgabe läßt sich als ein Standard-Minimum-Problem und als ein Standard-Maximum-Problem formulieren:

- Durch Multiplizieren mit (-1) können Maximierungsprobleme in Minimierungsprobleme und Restriktionen der Form „$\leq$" in Nebenbedingungen der Gestalt „$\geq$" umgewandelt werden (und umgekehrt).

- Gleichheitsbedingungen in den Nebenbedingungen lassen sich in zwei Ungleichungen auflösen.

- Auch mit negativen Variablen kann umgegangen werden; man schreibt sie als Differenz zweier nichtnegativer Variablen.

Typischerweise bieten aus diesem Grund Programmpakete meist nur eine bestimmte Form an. $\square$

Proposition 2.18 (Zur Lösungsmenge linearer Programme)

Gegeben sei ein Standard-Minimum-Problem (bzw. ein Standard-Maximum-Problem) gemäß Definition 2.16. Dann gilt:

1. Ist die Menge aller zulässigen Lösungen nach unten bzw. nach oben beschränkt, so existiert genau dann eine Optimallösung w^*, wenn es ein zulässiges w_0 gibt.

2. Die Menge W^* aller Optimallösungen ist konvex und abgeschlossen. $\square$

Bem. 2.19 (Zur Lösung von Ungleichungen)

Man kann mit Hilfe der linearen Optimierung auch überprüfen, ob ein Ungleichungssystem

$$R \cdot w \leq b$$

eine Lösung hat.
Dazu ersetzt man eine Komponente von b (z.B. $b[1]$) durch eine weitere Variable z und untersucht, ob das Problem

$$z \longrightarrow \min_{w,z}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{llll} r_{11} \cdot w[1] + r_{12} \cdot w[2] + & \ldots & -z & \leq & 0 \\ r_{12} \cdot w[2] + r_{22} \cdot w[2] + & \ldots & & \leq & b[2] \\ & \ldots & & & \end{array}$$

eine Lösung kleiner gleich $b[1]$ hat.

Alternativ kann man eine künstliche, beschränkte Zielfunktion einführen und das Problem

$$v \longrightarrow \max_{v,w}$$

unter den Nebenbedingungen

$$R \cdot w \leq b$$

$$v \leq 1$$

betrachten. Man erhält hier theoretisch sogar alle Lösungen.

Bem. 2.20 (Berechnung von Optimallösungen)

- Zur Lösung linearer Optimierungsprobleme steht eine Vielzahl von Algorithmen zur Verfügung. Das älteste und bekannteste Verfahren ist das so genannte *Simplex-Verfahren*, das auch in allen gängigen Programmpaketen implementiert ist.
  Es benutzt – wie seine vielen Abwandlungen (und Weiterentwicklungen) – die Tatsache, dass gemäß Satz 1.23 einer der Extremalpunkte zu einer Optimallösung führen muss, und sucht daher in „geschickter Weise“ die Extremalpunkte ab.
  Daneben gibt es noch eine Reihe von sehr effizienten „innere-Punkte-Methoden“ ⟶ Literatur.

- Bei zwei (oder drei) Variablen ist auch eine graphische Lösung möglich.

Bsp. 2.21 (Graphische Lösung von Beispiel 1.17)

2.2.4 Dualität der linearen Optimierung I

Jedem linearen Programm in Standardform kann ein sogenanntes *duales Programm* zugeordnet werden. Es entsteht dadurch, daß man von einem Minimierungsproblem zu einem Maximierungsproblem (und umgekehrt) übergeht und dabei für jede Restriktion des ursprünglichen Problems eine neue Variable einführt. Als neue Koeffizientenmatrix der Restriktionen dient die Transponierte der ursprünglichen Koeffizientenmatrix. Ferner sind auch die Rollen von c und b zu vertauschen; c wird zum Spaltenvektor der Restriktionen, während nun b zu einem Faktor des die Zielfunktion bestimmenden Skalarprodukts wird.

Def. 2.22 Duale Standard-Minimum- und Standard-Maximum-Probleme

Gegeben sei das Standard-Minimum-Problem in der Variablen w aus Definition 2.16. Dann heißt die Optimierungsaufgabe

$$\underset{(1\times m)}{b^T} \cdot \underset{(m\times 1)}{u} \rightarrow \max_u \tag{2.6}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \underset{(n\times m)}{R^T} \cdot \underset{(m\times 1)}{u} &\leq \underset{(n\times 1)}{c} \\ \underset{(m\times 1)}{u} &\geq \underset{(m\times 1)}{0} \end{aligned} \tag{2.7}$$

das *zugehörige duale Standard-Maximum-Problem.* In diesem Zusammenhang wird dann das ursprüngliche Problem als *primales* Standard-Minimum-Problem bezeichnet.

Analog wird bei gegebenem Standard-Maximum-Problem in der Variablen w die Optimierungsaufgabe

$$\underset{(1\times m)}{b^T} \cdot \underset{(m\times 1)}{u} \to \min_u \tag{2.8}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \underset{(n\times m)(m\times 1)}{R^T \cdot u} &\geq \underset{(n\times 1)}{c} \\ \underset{(m\times 1)}{u} &\geq \underset{(m\times 1)}{0} \end{aligned} \tag{2.9}$$

als *zugehöriges duales Standard-Minimum-Problem* bezeichnet. Das ursprüngliche Problem heißt dann *primales* Standard-Maximum-Problem. □

Der Zusammenhang zwischen Primalprogramm und Dualprogramm geht über die oben beschriebene, äußere Komplementarität weit hinaus:

Proposition 2.23 Zur Beziehung zwischen Primal-Problem und Dual-Problem

Gegeben sei das Standard-Minimum-Problem (2.2f.) in der Variablen w und das zugehörige duale Standard-Maximum-Problem (2.6f.) in der Variablen u. Dann gilt:

1. Das duale Standard-Minimum-Problem zu (2.6f.) ist wieder das ursprüngliche Standard-Minimum-Problem (2.2f.).

2. Ist $\tilde{w}$ eine zulässige Lösung eines Standard-Minimum-Problems und $\tilde{u}$ eine zulässige Lösung des zugehörigen dualen Standard-Maximum-Problems, so gilt
$$c^T \cdot \tilde{w} \geq b^T \cdot \tilde{u} \ .$$
$\tilde{w}$ und $\tilde{u}$ sind genau dann Optimallösungen, wenn in dieser Beziehung Gleichheit herrscht.

3. Das primale Standard-Minimum-Problem besitzt genau dann eine Optimallösung w^*, wenn für das duale Standard-Maximum-Problem eine Optimallösung u^* existiert. Gemäß oben sind dann beide Kriteriumswerte $c^T \cdot w^*$ und $b^T \cdot u^*$ gleich. $\square$

Bsp. 2.24 (Zur Dualität im Bsp. 1.17)

Bem. 2.25

Die Optimallösung $(u^*[1], \ldots, u^*[m])^T$ des dualen Standard-Minimum-Problems besitzen auch eine inhaltliche Interpretation. Ihre Komponenten werden als *Schattenpreise* oder *Opportunitätskosten* bezeichnet und geben an, um wie viel sich der Zielfunktionswert ändert, wenn sich die zugehörige Restriktion im primalen Programm um eine Einheit erhöht, sofern diese Änderung als klein angesehen werden kann, so dass die Restriktionen nicht „grob“ verletzt werden. Man erhält also sozusagen den Betrag, den man maximal bereit wäre, für eine Erweiterung der Restriktion um eine Einheit zu zahlen.

Bsp. 2.26 (Schattenpreise im Bsp. 1.17)

(Fortsetzung von Bsp. 2.21)

e) Kanonische Form, Schlupfvariablen

In gewisser Weise ausgezeichnet sind spezielle Standard-Minimum-Probleme und Standard-Maximum-Probleme, bei denen alle Restriktionen in Gestalt von Gleichungen vorliegen. Dies lässt sich stets dadurch erreichen, dass man wie in Definition 2.27 in jeder Nebenbedingung eine nichtnegative Hilfsvariable („*Schlupfvariable*") subtrahiert bzw. hinzuaddiert, die die Differenz zwischen beiden Seiten der Ungleichungen „auffängt". In die Zielfunktion gehen Schlupfvariablen nicht mit ein. Wichtig ist es, auf ihre Nichtnegativität zu achten, da sonst die ursprünglichen Restriktionen nicht mehr erfüllt sein müssen.

Def. 2.27 (Kanonische Form)

Gegeben sei das Standard-Minimum-Problem (2.2f.) in der Variablen w. Das Optimierungsproblem

$$c^T \cdot w \to \min_w \tag{2.10}$$

unter den Nebenbedingungen[5]

$$[R\ ,\ \ -I_m] \cdot \begin{bmatrix} w \\ w_s \end{bmatrix} = b \tag{2.11}$$

$$\underset{(n\times 1)}{w} \geq \underset{(n\times 1)}{0} \tag{2.12}$$

$$\underset{(m\times 1)}{w_s} \geq \underset{(m\times 1)}{0} \tag{2.13}$$

[5]Dabei bezeichnet I_m für jedes $m \in I\!N$ die m-dimensionale Einheitsmatrix.

heißt *(zugehöriges) Standard-Minimum-Problem in kanonischer Form (in der (Haupt)Variablen* w *mit der Schlupfvariablen* $w_s = (w_s[1], ..., w_s[m])^T$*).*

Analog heißt für das Standard-Maximum-Problem (2.4f.) in der Variablen w das Optimierungsproblem

$$c^T \cdot w \to \max_w \tag{2.14}$$

unter den Nebenbedingungen

$$[R\ ,I_m]\cdot\begin{bmatrix} w \\ w_s \end{bmatrix} = b \tag{2.15}$$

$$\underset{(n\times 1)}{w} \geq \underset{(n\times 1)}{0} \tag{2.16}$$

$$\underset{(m\times 1)}{w_s} \geq \underset{(m\times 1)}{0} \tag{2.17}$$

(zugehöriges) Standard-Maximum-Problem in kanonischer Form (in der (Haupt-)Variablen w mit der Schlupfvariablen $w_s = (w_s[1],...,w_s[m])^T$). □

Bsp. 2.28 Standard-Maximum Problem in kanonischer Form im Beispiel 1.17

Man bestimme das Standard-Maximum-Problem in der kanonischen Form.

Offensichtlich besteht folgender Zusammenhang zwischen den Lösungen eines Standard-Minimum- bzw. eines Standard-Maximum-Problems und den Lösungen des zugehörigen Problems in kanonischer Form:

Bem. 2.29 (Lösungen bei kanonischer Form und ursprünglicher Form)

Betrachtet man ein Standard-Minimum-Problem gemäß (2.2f.) bzw. ein Standard-Maximum-Problem laut (2.4f.) sowie die in (2.10ff.) und (2.14ff.) beschriebenen zugehörigen Standard-Minimum-Probleme bzw. Standard-Maximum-Probleme in kanonischer Form. Dann gilt:

1. Ist $(\bar{w}[1], ..., \bar{w}[n], \bar{w}_s[1], ..., \bar{w}_s[m])^T$ zulässig (resp. eine Optimallösung) für das Problem in kanonischer Form gemäß (2.10ff.) bzw. (2.14ff.), so ist $(\bar{w}[1], ..., \bar{w}[n])^T$ zulässig (resp. eine Optimallösung) für das entsprechende Problem (2.2f.) bzw. (2.4f.).

2. Umgekehrt gibt es zu jeder zulässigen (resp. optimalen) Lösung $(\bar{w}[1], ..., \bar{w}[n])^T$ des Problems (2.2f.) bzw. (2.4f.) eine zulässige (resp. optimale) Lösung $(\bar{w}[1], ..., \bar{w}[n], \bar{w}_s[1], ..., \bar{w}_s[m])^T$ des zugehörigen Problems in kanonischer Form laut (2.10ff.) bzw. (2.14ff.). $\square$

Der praktische Nutzen der Verwendung von Schlupfvariablen liegt darin, dass man durch sie erkennen kann, bei welchen Restriktionen noch „Spiel ist“, d.h. welche Kapazitätsbeschränkungen nicht zur Gänze ausgeschöpft werden.

f) Dualität II: Der Satz vom komplementären Schlupf

Vom theoretischen wie praktischen Blickwinkel ist der Satz vom komplementären Schlupf (s.u.) von groŝer Bedeutung. Wendet man zu seiner Vorbereitung die Dualitätsbetrachtungen aus Definition 2.22 auf Standard-Minimum- bzw. Standard-Maximum-Probleme in kanonischer Form an, so erhält man:

Bem. 2.30 Duale Programme bei Programmen in kanonischer Form

Ist ein Standard-Minimum-Problem in kanonischer Form der in (2.10ff.) beschriebenen Gestalt gegeben, so lautet das zugehörige duale Standard-Maximum-Problem in kanonischer Form:

$$b^T \cdot u \to \max_u \tag{2.18}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \left[R^T\ ,\quad I_n\right] \cdot \begin{bmatrix} u \\ u_r \end{bmatrix} &= c &\quad (2.19)\\ \underset{(m\times 1)}{u} &\geq \underset{(m\times 1)}{0} &\quad (2.20)\\ \underset{(n\times 1)}{u_r} &\geq \underset{(n\times 1)}{0}\ . &\quad (2.21) \end{aligned}$$

Entsprechend lautet das zu einem Standard-Maximum-Problem in kanonischer Form (vgl. 2.14ff.) gehörende duale Standard-Minimum-Problem in kanonischer Form:

$$b^T \cdot u \rightarrow \min \tag{2.22}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\left[R^T\ ,\quad -I_n\right] \cdot \begin{bmatrix} u \\ u_r \end{bmatrix} = c \tag{2.23}$$

$$\underset{(m\times 1)}{u} \geq \underset{(m\times 1)}{0} \tag{2.24}$$

$$\underset{(n\times 1)}{u_r} \geq \underset{(n\times 1)}{0}\ . \tag{2.25}$$

□

Natürlich behalten die Dualitätsergebnisse aus Proposition 2.23 ihre Gültigkeit. Darüber hinaus lässt sich jedoch ein fundamentaler Zusammenhang zwischen den Optimallösungen eines Problems und den Schlupfvariablen des zugehörigen dualen Problems herleiten. Es kann nämlich aus der Existenz von echt von Null verschiedenen Komponenten einer Optimallösung auf das Verschwinden der entsprechenden Haupt- bzw. Schlupfvariablen in *allen* Optimallösungen des zugehörigen Dual-Problems geschlossen werden. Auch ist es möglich, zulässige Lösungen aufgrund ihres Schlupfes unter Umständen als optimal zu charakterisieren:

Proposition 2.31 (Der Satz vom komplementären Schlupf)

Betrachtet werde ein Standard-Minimum-Problem bzw. ein Standard-Problem in kanonischer Form gemäß (2.10ff.) bzw. (2.14ff.) und das zugehörige duale Problem in kanonischer Form, wie in (2.18ff.) bzw. (2.22ff.) beschrieben. Dann gilt:

1. Ist $\left(\tilde{w}^T, \tilde{w}_s^T\right)^T$ eine zulässige Lösung des primalen Problems und $\left(\tilde{u}^T, \tilde{u}_r^T\right)^T$ eine zulässige Lösung des zugehörigen dualen Problems, so sind beide genau dann optimal, wenn gilt
$$\tilde{w}^T \cdot \tilde{u}_r + \tilde{w}_s^T \cdot \tilde{u} = 0 \ . \tag{2.26}$$

Korollar 2.32

In der Situation von Proposition 2.31 gilt für alle $j = 1, \ldots, m$:

a) Gibt es eine Optimallösung
$$(w^*[1], ..., w^*[n], w_s^*[1], ..., w_s^*[m])^T$$
für das primale Problem mit
$$w_s^*[j] > 0 \ ,$$
so ist
$$u^*[j] = 0$$
für alle Optimallösungen
$$(u^*[1], ..., u^*[m], u_r^*[1], ..., u_r^*[n])^T$$
des zugehörigen Dualproblems.

b) Gibt es eine Optimallösung

$$(u^*[1], ..., u^*[m], u_r^*[1], ..., u_r^*[n])^T$$

des Dualproblems mit

$$u^*[j] > 0 \ ,$$

so ist

$$w_s^*[j] = 0$$

für alle Optimallösungen

$$(w^*[1], ..., w^*[n], w_s^*[1], ..., w_s^*[m])^T$$

des primalen Problems. $\square$

Bsp. 2.33 (Der Satz vom komplemtären Schlupf im Beispiel 2.28)

Illustrieren Sie anhand von Bsp 1.17 den Satz vom komplementären Schlupf!

g) Erweiterungen

Es gibt eine Reihe wichtiger Erweiterungen:

- nichtlineare Zielfunktionen
  Hier gibt es eine Vielzahl von leistungsfähigen Algorithmen. Ist die Zielfunktion der Quotient zweier linearer Funktionen, so lässt sich eine geeignete Verallgemeinerung von Satz 1.23 und damit auch des Simplex-Algorithmus finden („*Quotientenoptimierung*“).

  Bei allgemeinen Zielfunktionen wird das Extremum nicht notwendig in einem Extremalpunkt angenommen.

Betrachtet man beispielsweise (Varianz der Bernoulli-Verteilung)

$$\begin{aligned} p(1-p) &\rightarrow \max \\ p &\geq 0 \\ -p &\geq -1, \end{aligned}$$

so liegt die Optimallösung p^* bei $\frac{1}{2}$.

Dennoch lassen sich quadratische Optimierungsprobleme (wie z.B. das KQ-Kriterium unter Nebenbedingungen) mit einem Simplex-ähnlichen Verfahren lösen (etwa: Büning et. al., 2000, Kap. 8.9).

- *Parametrische Optimierung*:
  Die Zielfunktion und/oder Restriktionen hängen von einem Parameter ab.
  (Wichtig z.B. für Sensitivitätsanalysen) Auch hier sind Varianten z.B. des Simplex-Verfahren möglich.

- *Ganzzahlige Optimierung*
  Sind die Lösungen inhaltlich zwingend ganzzahlig (z.B. die Aufteilung von wenigen unteilbaren Ressourcen), so ist eine eigenständige Betrachtung nötig.
  Ein besonderer Spezialfall ist die *Boolesche Optimierung*, bei der nur $0, 1$-Variablen zugelassen sind.