2.3 Minimax/Maximin Aktionen

2.3.1 Das Kriterium: Motivation und Definition

Bsp. 2.34 (Motivationsbeispiel Kuchen teilen) *vgl. das Bsp. in Abschnitt 1.3.3*

Def. 2.35 (Maximin/Minimax-Aktion)

a) Gegeben sei ein datenfreies Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ in Nutzenform.

Dann heißt $a^* \in \mathbb{A}$ *Maximin-Aktion*, wenn

$$\inf_{\vartheta \in \Theta} u(a^*, \vartheta) \geq \inf_{\vartheta \in \Theta} u(a, \vartheta) \quad \forall a \in \mathbb{A}. \tag{2.27}$$

b) Bei einem datenfreien Entscheidungsproblem in Verlustform $(\mathbb{A}, \Theta, l(\cdot))$ heißt $a^* \in \mathbb{A}$ *Minimax-Aktion*, wenn gilt

$$\sup_{\vartheta \in \Theta} l(a^*, \vartheta) \leq \sup_{\vartheta \in \Theta} l(a, \vartheta) \quad \forall a \in \mathbb{A}. \tag{2.28}$$

Bem. 2.36

Man verwendet als Kriteriumsfunktion

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{A} &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto \inf_{\vartheta} u(a, \vartheta) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{A} &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto -\sup_{\vartheta} l(a, \vartheta) \end{aligned}$$

Abraham Wald (1902 – 1950)

Foto: Oberwolfach Photo Collection
(http://owpdb.mfo.de/person_detail?id=4398 [Stand: 01.07.2013])

Bsp. 2.37 (Ausflugs und Omelettenproblem)

Bsp. 2.38 (Maximin-Entscheidungsfunktion im Investitionsproblem)

Betrachten Sie das Investitionsproblem mit der in der in Kapitel 1.5 beschriebenen Informationsstruktur:

Datenfreies Entscheidungsproblem

	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3
a_1	10 000	2 000	–15 000
a_2	1 000	1 000	0

Informationsstruktur

	x_1	x_2	x_3
ϑ_1	0.6	0.3	0.1
ϑ_2	0.2	0.4	0.4
ϑ_3	0.1	0.4	0.5

Notation wiederum:

$$d(i_1, i_2, \ldots, i_s) \quad \text{für} \quad d = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_s \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_s} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Maximin-Entscheidungsfunktion!

Datengestütztes Entscheidungsproblem: Auswertungsproblem

	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	Minimum
$d(1,1,1)$	10 000	2 000	–15 000	– 15 000
$d(1,1,2)$	9 100	1 600	– 7 500	– 7 500
$d(1,2,1)$	7 300	1 600	– 9 000	– 9 000
$d(1,2,2)$	6 400	1 200	– 1 500	– 1 500
$d(2,1,1)$	4 600	1 800	–13 500	– 13 500
$d(2,1,2)$	3 700	1 400	– 6 000	– 6 000
$d(2,2,1)$	1 900	1 400	– 7 500	– 7 500
$d(2,2,2)$	1 000	1 000	0	– **0**

Bem. 2.39 (Randomisieren und Maximin-Kriterium)

Der Übergang zur gemischten Erweiterung kann den Kriteriumswert erhöhen. Ist a^* Maximin-Aktion in $(\mathcal{M}(\mathbb{A}), \Theta, \tilde{u}(\cdot))$, so kann es sein, dass

$$\inf_{\vartheta \in \Theta} \tilde{u}(a^*, \vartheta) > \inf_{\vartheta \in \Theta} u(a, \vartheta) \; \forall a \in \mathbb{A}$$

2.3.2 Berechnung/Auffinden von Minimax-/Maximin-Aktionen

Bem. 2.40 (Die graphische Bestimmung von Minimax/Maximin Aktionen bei zweielementigem Zustandsraum)

Bem. 2.42 (Vorüberlegung zur Bestimmung von Maximin-Aktionen über lineare Optimierung bei endlichen $\mathbb{A}$ und Θ)

Proposition 2.43 (Bestimmung von Maximin-Aktionen über lineare Optimierung)

Gegeben sei die gemischte Erweiterung $(\mathcal{M}(\mathbb{A}), \Theta, u(\cdot))$ eines datenfreien Entscheidungsproblem in Nutzenform bei endlichem $\mathbb{A}$ und endlichem Θ. Die randomisierte Aktion $\lambda^* = (\lambda(a_1), \ldots, \lambda(a_n))$ ist Maximin-Lösung genau dann, wenn sie Optimallösung des folgenden Optimierungsproblems ist:

$$M \longrightarrow \max_{M, \lambda(a_1), \ldots, \lambda(a_n)}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^{n} u(a_i, \vartheta_j)\lambda(a_i) \geq M, \; j = 1, \ldots, m,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda(a_i) = 1,$$
$$\lambda(a_i) \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

i) Es entsteht also folgendes Standardmaximum-Problem in den Variablen $M, \lambda(a_1), \ldots, \lambda(a_n)$

$$M \longrightarrow \max_{M, \lambda(a_1), \ldots, \lambda(a_n)}$$

unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{aligned}
M-\sum_{i=1}^{n} u(a_i,\vartheta_1)\lambda(a_i) &\leq \;\; 0\\
\vdots \qquad\qquad\qquad & \;\vdots \quad\; \vdots\\
M-\sum_{i=1}^{n} u(a_i,\vartheta_m)\lambda(a_i) &\leq \;\; 0\\
\sum_{i=1}^{n} \lambda(a_i) &\leq \;\; 1\\
-\sum_{i=1}^{n} \lambda(a_i) &\leq -1\\
\lambda(a_1) &\geq \;\; 0\\
\vdots \qquad\qquad\qquad & \;\vdots \quad\; \vdots\\
\lambda(a_n) &\geq \;\; 0\\
M &\geq \;\; 0,
\end{aligned}
$$

wobei stillschweigend (wegen der Nichtnegativität von M) vorausgesetzt wurde, dass o. B. d. A. $u(a_i, \vartheta_j) \geq 0$ f ür alle $i = 1\ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$ ist. (Sonst gehe man über zu $u(a_i, \vartheta_j) := u(a_i, \vartheta) - \min_{i,j} u(a_i, \vartheta_j)$, was dieselben optimalen Werte von $\lambda(a_1), \ldots \lambda(a_n)$ liefert.)

Also:

$$(1, 0, \ldots, 0) \cdot \begin{pmatrix} M \\ \lambda(a_1) \\ \vdots \\ \lambda(a_n) \end{pmatrix} \longrightarrow \max_{M, \lambda(a_1), \ldots, \lambda(a_n)}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} 1 & -u(a_1,\vartheta_1) & -u(a_2,\vartheta_1) & -\ldots- & u(a_n,\vartheta_1) \\ 1 & -u(a_1,\vartheta_2) & -u(a_2,\vartheta_2) & -\ldots- & u(a_n,\vartheta_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & -u(a_1,\vartheta_m) & -u(a_2,\vartheta_m) & -\ldots- & u(a_n,\vartheta_m) \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \ldots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ \lambda(a_1) \\ \lambda(a_2) \\ \vdots \\ \lambda(a_n) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M \\ \lambda(a_1) \\ \vdots \\ \lambda(a_n) \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sucht man die optimale unrandomisierte Aktion, so kann man diese auch mithilfe Boolscher Optimierung aus diesem Optimierungsproblem gewinnen.

Def. 2.44 (Equalizer-Aktion, Äquilisator-Aktion)
Eine Aktion $a \in \mathbb{A}$ mit in ϑ konstantem Nutzen heißt *Equalizer-Aktion* oder *Äquilisator-Aktion.*

Bsp. 2.46 ($\bar{X}$ als Minimax-Schätzer bei Normalverteilung)

Anwendung in der statistischen Entscheidungstheorie:

$$X_1, ..., X_n \; i.i.d. \; \sim N(\mu, \sigma_0^2)$$

.

Standardschätzer für μ ist $\bar{X}$, der auch unter allen erwartungstreuen Schätzern die gleichmäßig kleinste Varianz besitzt. (UMVU, siehe auch Kap. 1.5) Frage: Ist $\bar{X}$ auch bezüglich des MSE als Risikofunktion Minimax-Schätzer?

2.3.3 Weitere Eigenschaften von Minimax-/Maximin-Aktionen

Proposition 2.47 (Invarianz gegenüber monotonen Transformationen des Nutzens)

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion.
Betrachtet man die Entscheidungsprobleme $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ und $(\mathbb{A}, \Theta, g \circ u(\cdot))$ mit

$$\begin{aligned} g \circ u : A \times \Theta &\to \mathbb{R} \\ (a, \vartheta) &\mapsto g(u(a, \vartheta)), \end{aligned}$$

so gilt:

i) Ist a^* Maximin-Aktion in $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$, so ist sie Maximin-Aktion in $(\mathbb{A}, \Theta, g \circ u(\cdot))$.

ii) Ist g streng monoton und $|\Theta| < \infty$, so gilt sogar: Eine Aktion a^* ist Maximin-Aktion in $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ genau dann wenn sie Maximin-Aktion in $(\mathbb{A}, \Theta, g \circ u(\cdot))$ ist.

Bem. 2.48 (Tücken und formale Kritik des Maximin-Prinzips)

a) Bei unendlichen Mengen müssen Minimax/Maximin-Aktionen nicht existieren $\longrightarrow$ Übergang zu ε-Minimax bzw. ε-Maximin-Aktionen

$$\inf_{\vartheta\in\Theta} u(a^*,\vartheta) \geq \inf_{\vartheta\in\Theta} u(a,\vartheta) - \varepsilon, \qquad \forall a \in \mathbb{A}$$

(wird eher selten betrachtet, jedenfalls in der Vorlesung gar nicht.)

b) Minimax/Maximin-Aktionen müssen nicht eindeutig sein.

c) Minimax/Maximin-Aktionen müssen nicht zulässig sein.

d) Beim Übergang zur gemischten Erweiterung kann sich der Kriteriumswert erhöhen.

e) Kritik anhand der Metaregeln.

d1) Minimax/Maximin Kriterium ist nur bei endlichem Θ notwendig kompatibel mit der Dominanzrelation.

Kompatibilität mit der Dominanzrelation:
Ein Optimalitätskriterium Φ ist kompatibel mit der Dominanzrelation, wenn für alle $a, b \in \mathbb{A}$ gilt:

$$a \preceq b \quad \Longrightarrow \quad \Phi(a) \leq \Phi(b) \tag{2.29}$$

$$a \prec b \quad \Longrightarrow \quad \Phi(a) \leq \Phi(b) \tag{2.30}$$

$$a \prec\!\!\prec b \quad \Longrightarrow \quad \Phi(a) < \Phi(b) \tag{2.31}$$

d2) Die Spaltenlinearität ist verletzt.

Spaltenlinerität:
Die durch Φ induzierte Präferenzordnung soll ungeändert bleiben, wenn für einen beliebigen Zustand ϑ_{j^*} die Spalte der Nutzenwerte um einen konstanten Betrag verändert wird

$$\begin{array}{lcl} u(a_1, \vartheta_{j^*}) & & u(a_1, \vartheta_{j^*}) + c \\ u(a_2, \vartheta_{j^*}) & \longrightarrow & u(a_2, \vartheta_{j^*}) + c \\ \vdots & & \vdots \\ u(a_m, \vartheta_{j^*}) & & u(a_m, \vartheta_{j^*}) + c \end{array}$$

Satz 2.51 (Existenz Maximin-optimaler Lösungen bei endlichem Θ)

Gegeben sei ein datenfreies Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ mit endlicher Aktionsmenge $\mathbb{A}$ und endlichem Zustandsraum Θ. Dann existiert eine Maximin-Aktion in $\mathbb{A}$ und in $\mathcal{M}(\mathbb{A})$.
Beweis:

Korollar 2.53

Unter den gegebenen Voraussetzungen ist die Menge aller Maximin-Lösungen konvex und abgeschlossen.

Bem. 2.54 (Maximin-Regel: Zusammenfassung und inhaltliche Kritik)

2.3.4 Einblick in die Spieltheorie

Einführung

a Das Prisoner Dilemma:
Als Beispiel für ein nicht-kooperatives Nichtnullsummenspiel

* Spieler I, II

* Aktionen

	I	II
Gestehen	α_1	β_1
Nichtgestehen	α_2	β_2

$*$ Verlustsituation: (Jahre Gefängnis)

beide gestehen	$\Rightarrow$	beide 8 Jahre
beide gestehen nicht	$\Rightarrow$	beide 1 Jahr
genau einer gesteht	$\Rightarrow$	Geständiger: 0.25 Jahre
		Nichtgeständiger: 10 Jahre

Entscheidungsproblem mit durch Gegenspieler ausgelösten Umweltzuständen

	β_1	β_2
α_1	$(8, 8)$	$(0.25, 10)$
α_2	$(10, 0.25)$	$(1, 1)$

Entscheidungstheorie: α_1 dominiert α_2 stark

$\Rightarrow$ α_1 wählen

aus Sicht Spieler II: β_1 dominiert β_2 stark
$\Rightarrow \beta_1$ wählen

Dies führt aber auf (8,8). Kollektive Gefährdung durch partielle Vernunft (Trittbrettfahrerproblem, Anbau von Monokultur, usw.).

2.3.5 Zwei-Personen-Nullsummenspiele

Spieler I : $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$
Spieler II: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$

Regel:
Bei Zusammentreffen von α_i mit β_i erhält I von II den Betrag a_{ij}; der Gewinn von I ist genau der Verlust von II und umgekehrt. Daher der Name Nullsummenspiel.

Auszahlungsmatrix (a_{ij})

$$\begin{array}{c|cccc} & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \hline \alpha_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & \\ \alpha_2 & & & & \\ \vdots & & & a_{ij} & \\ \alpha_m & & & & \end{array}$$

Für Spieler I ist die *Maximin* Strategie sinnvoll. Er kann (mindestens) den Betrag

$$v_I := \max_i \min_j a_{ij}$$

erzielen.

Spieler II: Minimax Strategie (da aus seiner Sicht Verlusttafel)
Spieler II wird höchstens

$$v_{II} := \min_j \max_i a_{ij}$$

zahlen müssen.

$$\begin{matrix} v_I \\ v_{II} \end{matrix} \text{ Spielwert von Spieler } \begin{matrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{matrix}$$

Allgemein

$$v_I \leq v_{II}$$

Bsp:

	β_1	β_2	
α_1	3	9	3
α_2	10	1	1
	10	9	

Def. 2.55 (Sattelpunkt)

Ein Strategiepaar $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$ heißt *Sattelpunkt* $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} a(i, j_0) &\leq a(i_0, j_0) \quad i = 1, \ldots, m \\ a(i_0, j) &\geq a(i_0, j_0) \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Satz 2.56

a $v_I = v_{II} \Longleftrightarrow$ das Spiel besitzt mindestens einen Sattelpunkt

b Für jeden Sattelpunkt gilt

$$v_I = v_{II}$$

Sattelpunkt: Lösung eines Spiels

Wählen I, II beide eine Sattelpunktstrategie, so ist es für keinen von Vorteil, davon allein abzuweichen.

Bsp zeigt: es muss nicht immer einen Sattelpunkt geben (in den reinen Aktionen)

Satz 2.57 (Hauptsatz der Spieltheorie)

In der gemischten Erweiterung gibt es stets mindestens einen Sattelpunkt.

2.4 Bayes-Aktionen; konditionale Bayes-Inferenz

2.4.1 Entscheiden in der Risikosituation

Bsp. 2.58 (Beispiel: Lotterie vgl. Bsp. in Abschnitt 1.3.2)

Urne mit g
(hier: 50) grünen, b (30) blauen und r (20) restlichen Kugeln.
Man kann

a_1 nicht spielen
a_2 zum Preis von 20 auf Grün setzen
a_3 zum Preis von 10 auf Blau setzen

Nur einmaliger, zufälliger Zug aus der Urne, man erhält 100 Euro bei Treffer:

	grün	blau	rest	Min
a_1	0	0	0	0
a_2	80	-20	-20	-20
a_3	-10	90	-10	-10

Wie würden Sie sich entscheiden?

Def. 2.59

Gegeben seien

- ein Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ in Nutzenform
- eine σ-Algebra $\sigma(\Theta)$ über Θ, die alle Einpunktmengen $\{\vartheta\}$ enthält.
- Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\pi(\cdot)$ über $(\Theta, \sigma(\Theta))$.

Dann heißt für jedes $a \in \mathbb{A}$

$$\mathbb{E}_\pi(u(a)) := \int_\Theta u(a, \vartheta)\, \mathrm{d}\pi(\vartheta) \tag{2.32}$$

der *Erwartungsnutzen* von a.

Bem. 2.60

- $u(a,\cdot)$ ist nun sozusagen eine Zufallsgröße $u(a)$!
  Ein Zufallsexperiment determiniert ϑ, damit also auch den konkret sich einstellenden Nutzen

$$u(a): \begin{array}{rcl} \Theta & \to & \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad (\Theta, \sigma(\Theta)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \\ \vartheta & \mapsto & u(a)(\vartheta) := u(a,\vartheta) \end{array}$$

- Zu (2.32) sei nochmals an die Definition des allgemeinen Maßintegral erinnert. Insbesondere gilt wiederum

  * $\pi(\cdot)$ stetig mit Dichte $f(\cdot)$, dann

$$\mathbb{E}(u(a)) = \int_{\Theta} u(a, \vartheta) f(\vartheta) \, \mathrm{d}\vartheta$$

  * $\pi(\cdot)$ diskret mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $\pi(\{\vartheta\})_{\vartheta \in \Theta}$

$$\mathbb{E}(u(a)) = \sum_{\vartheta \in \Theta} u(a, \vartheta) \pi(\{\vartheta\})$$

Def. 2.61 (Bernoullikriterium)

In der Situation von Def. 2.59 wähle man

$$\begin{aligned}\Phi(\cdot,\pi)\ :\ &\mathbb{A} \to \mathbb{R}\\ &a \longmapsto \Phi(a,\pi) = \mathbb{E}_\pi(u(a))\end{aligned}$$

als Kriteriumsfunktion!

Bem. 2.63

Gerade bei diesem Kriterium ist es absolut essentiell, sich daran zu erinnern, dass der Nutzen nicht notwendig linear in den Geldbeträgen ist.

Bem. 2.65 (Einbeziehen der Varianz)

V. a. bei wirtschaftlichen Anwendungen wird manchmal ergänzend die Varianz von $u(a, \cdot)$ (oder ein anderes Risikomaß) mit einbezogen; man spricht dann von (μ, σ)-Kriterien (μ Mittelwert, σ^2 Varianz).

Dies kann auf zwei Arten geschehen:

1) *Zweistufige* (μ, σ)-*Kriterien* (um zwischen Aktionen mit gleichen Erwartungswerten zu differenzieren), also etwa:

$$\widetilde{\Phi} : \mathbb{A} \to \begin{pmatrix} \mathbb{E}_\pi \; u(a) \\ \mathbb{V}_\pi \; u(a) \end{pmatrix}$$

im Sinne der lexikographischen Ordnung (bzgl. $-v$), also

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}(a) &> \widetilde{\Phi}(a') \quad \Longleftrightarrow \\ \mathbb{E}_\pi(u(a)) &> \mathbb{E}_\pi(u(a')) \text{ oder} \\ \mathbb{E}_\pi(u(a)) &= \mathbb{E}_\pi(u(a')) \text{ und } \mathbb{V}_\pi(u(a)) < \mathbb{V}_\pi(u(a')) \end{aligned}$$

2) *einstufige* (μ, σ)-*Kriterien* mit der Kriteriumsfunktion

$$\Phi(a) = \mathbb{E}_\pi(u(a)) - c \cdot \sqrt{\mathbb{V}_\pi(u(a))}$$

$c > 0$ (üblich): risikoavers, eventuell aber auch $c < 0$: risikofreundlich (z.B. Glücksspiel).

2.4.2 Grundlagen der Bayesianischen Ansätze

Bem. 2.66 (Erstes Bayesianisches / Subjektivistisches Paradigma)

Jede Situation unter Unsicherheit kann durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \pi(\cdot))$ beschrieben werden.

Im Kontext eines Entscheidungsproblems heißt die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi(\cdot)$ über $(\Theta, \sigma(\Theta))$ *(a) Priori-Verteilung* (Verteilung „vor den Daten“) (zu $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$).

2.4.3 Bayes-Aktionen: Definition, Bestimmung und wichtige Eigenschaften

Def. 2.67 (Bayes-Aktion)

Gegeben sei ein Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$.

a) Ist $\pi(\cdot)$ eine Priori-Verteilung zu $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$, so heißt
$\Phi(\cdot, \pi) \, : \, \mathbb{A} \to \mathbb{R}$

$$a \longmapsto \Phi(a, \pi) = \mathbb{E}_\pi(u(a)) = \int_\Theta u(a, \vartheta) \; d\pi(\vartheta)$$

Bayes-Kriterium zu $\pi(\cdot)$ und jede bezüglich dieses Kriteriums optimale Aktion a^* *Bayes-Aktion bezüglich* $\pi(\cdot)$.

$$B(\pi) := \Phi(a^*, \pi)$$

heißt *Bayes Nutzen bezüglich* $\pi(\cdot)$

b) Eine Aktion a^{**} heißt *Bayes-Aktion (schlechthin)*, wenn es eine Priori-Bewertung $\pi^{**}(\cdot)$ zu $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ gibt, so dass a^{**} Bayes Aktion bezüglich $\pi^{**}(\cdot)$ ist.

Bem. 2.68

Beachte: „Rein mathematisch“ besteht kein Unterschied zum Bernoullikriterium; semantisch handelt es sich aber bei der Wahrscheinlichkeitsbewertung der Zustände um ein anderes Objekt, nämlich um eine subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertung.

Bem. 2.69

- Es ist einfach, Beispiele zu finden, bei denen alle Aktionen eines Entscheidungsproblems Bayes-Aktionen sein können. Vorwurf der Beliebigkeit.

- Hinweis auf das sog. Bayes-Umkehrproblem (Bem. 2.76): Zu welcher Aktion gibt es eine Priori-Bewertung, bezüglich derer die jeweilige Aktion Bayes-Aktion ist?

Bem. 2.71 (Der Bayes-Nutzen randomisierter Aktionen)

Für randomisierte Aktionen $\tilde{a}$ ist unter schwachen Regularitätsbedingungen (Anwendbarkeit des Satzes von Fubini)

$$\begin{aligned}
\Phi(\tilde{a}, \pi) = \mathbb{E}_{\pi}(u(\tilde{a})) &= \int_{\Theta} u(\tilde{a}, \vartheta) d\pi(\vartheta) \\
&= \int_{\Theta} \left(\int_{\mathbb{A}_0} u(a, \vartheta) d\tilde{a}(a) \right) d\pi(\vartheta) \qquad (2.33) \\
&= \int_{\mathbb{A}_0} \left(\int_{\vartheta} u(a, \vartheta) d\pi(\vartheta) \right) d\tilde{a}(a) \\
&= \int_{\mathbb{A}_0} \Phi\left(a, \pi\right) d\tilde{a}(a)
\end{aligned}$$

$$(2.34)$$

also gilt etwa bei endlichen $\mathbb{A}_0$ und Θ:

Hat $\widetilde{a}(\cdot)$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion $(\widetilde{p}(a_i))_{i=1,\ldots,n}$ auf $\mathbb{A}_0$ und $\pi(\cdot)$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion $(\pi(\{\vartheta_j\})_{j=1,\ldots,m}$ auf Θ, so gilt:

$$\begin{aligned}
\Phi(\widetilde{a},\pi) &= \sum_{j=1}^{m} u(\widetilde{a},\vartheta_j)\cdot\pi(\{\vartheta_j\}) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} u(a_i,\vartheta_j)\cdot p(\{a_i\})\right)\pi(\{\vartheta_j\}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} u(a_i,\vartheta_j)\cdot \pi(\{\vartheta_j\})\right)p(\{a_i\}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Phi(a_i,\pi)\cdot p(\{a_i\})
\end{aligned}$$

Proposition 2.73 (Berechnung von Bayes-Aktionen über lineare Optimierung bei endlichem Θ und endlichem $\mathbb{A}$)

Bem. 2.76 Bayes-Umkehrproblem bei endlichem Θ und endlichem $\mathbb{A}$

Es soll die Menge Π_a aller Priori-Verteilungen angegeben werden, für die eine *gegebene Aktion* $a \in \mathbb{A}$ Bayes-Aktion in $\mathbb{A}$ ist.

2.4.4 Wichtige Sätze über Bayes-Aktionen

Im folgenden $|\Theta| < \infty$, also endliche Zustandsmengen.
Viele Sätze gelten unter geeigneten Zusatzvorraussetzungen mutatis mutandis auch für unendliche Zustandsräume.
($\mathbb{A}$ nicht notwendig als endlich vorausgesetzt, da man ja auch $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ betrachten will.)

a) Entbehrlichkeit randomisierter Aktionen

Satz 2.77 (Entbehrlichkeit randomisierter Aktionen)

Gegeben sei ein Entscheidungsproblem $(\mathcal{M}(\mathbb{A}_0), \Theta, \tilde{u}(\cdot))$, das die gemischte Erweiterung eines Entscheidungsproblems $(\mathbb{A}_0, \Theta, u(\cdot))$ mit endlicher Aktionenmenge $\mathbb{A}_0$ darstellt. Dann gilt für jede Priori-Verteilung $\pi(\cdot)$:
Ist $\widetilde{a} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ Bayes-Aktion zur Bewertung $\pi(\cdot)$, so gibt es auch eine reine Aktion $a \in \mathbb{A}_0$, die Bayes-Aktion zu $\pi(\cdot)$ in $\mathcal{M}(\mathbb{A}_0)$ ist.

Korollar 2.78

In der Situation von Satz 2.77 gilt für jede Priori-Verteilung $\pi(\cdot)$:
Bayes-Aktionen zu $\pi(\cdot)$ in $\mathbb{A}_0$ bleiben Bayes-Aktionen zu $\pi(\cdot)$ beim Übergang zu $\mathcal{M}(\mathbb{A}_0)$.

Beweis des Korollars:
Angenommen a_0^* sei eine Bayes-Aktion zu $\pi(\cdot)$ zu $\pi(\cdot)$ in $\mathbb{A}_0$, aber nicht Bayes-Aktion zu $\pi(\cdot)$ in $\mathcal{M}(\mathbb{A}_0)$. Dann gibt es ein $\widetilde{a}^* \in \mathcal{M}(\mathbb{A}_0)$ mit

$$\Phi(\widetilde{a}^*, \pi) > \Phi(a_0^*, \pi). \tag{2.35}$$

Wegen Satz 2.77 gibt es dann eine reine Aktion $a^* \in \mathbb{A}_0$, so dass auch a^* Bayes-Aktion in $\mathcal{M}(\mathbb{A}_0)$ ist.
D.h. $\Phi(\widetilde{a}^*, \pi) = \Phi(a^*, \pi)$. Wegen (2.35) ist damit

$$\Phi(a^*, \pi) > \Phi(a_0^*, \pi).$$

Beachte, dass $a^* \in \mathbb{A}_0$; also ist a_0^* nicht Bayes-Aktion zu $\pi(\cdot)$ in $\mathbb{A}_0$. Widerspruch!

(Die Menge der reinen Bayes-Aktionen bildet so etwas wie eine wesentlich minimal vollständige Klasse bezüglich der durch $\Phi(\cdot, \pi)$ induzierten Ordnung)

Interpretation:

Bem. 2.79 (Zum Beweis von Satz 2.51)

(Beweis hier auf zwei Arten, inklusive einer **geometrischen Veranschaulichung**)

b) Bayes-Aktionen und Zulässigkeit

Satz 2.80 Zulässigkeit von Bayes-Aktionen zu nicht entarteten Priori-Verteilungen

Gegeben sei ein Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ mit Priori-Bewertung $\pi(\cdot)$ so, dass $\pi(\{\vartheta_j\}) > 0$ für alle j.
Dann gilt: Jede Bayes-Aktion a^* zu $\pi(\cdot)$ ist zulässig.

Interpretation:

Proposition 2.81

Gegeben sei ein Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$. Ist $a \in \mathbb{A}$ eine zulässige Bayes-Aktion, so ist a auch zulässig im Problem $(\mathcal{M}(\mathbb{A}), \Theta, \tilde{u}(\cdot))$.

Neu ist hier die Aussage für $\pi(\{\vartheta_j\}) = 0$ für manche j. Für $\pi(\{\vartheta_j\}) > 0$ folgt die Aussage bereits aus Korollar 2.78 und Satz 2.80; nach dem Korollar ist a auch Bayes-Aktion in der gemischten Erweiterung, auf die dann Satz 2.80 angewendet werden kann.

Sind umgekehrt zulässige Aktionen auch Bayes-Aktionen?

Satz 2.82

Betrachtet werde ein Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$. Ist $\mathbb{A}$ konvex, z.B. $\mathbb{A} = \mathcal{M}(\mathbb{A}_0)$ für eine geeignete Aktionenmenge $\mathbb{A}_0$, dann gilt: Zu jeder zulässigen Aktion a gibt es eine Priori Verteilung $\pi^a(\cdot)$ mit $\pi^a(\{\vartheta_j\}) > 0$, $j = 1, \ldots, m$, so dass a Bayes-Aktion zur Bewertung $\pi^a(\cdot)$ ist.

Interpretation:

2.4.5 Bayes und Minimax

Def. 2.83 (Ungünstigste Priori-Verteilung)

Gegeben sei ein Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$. Eine Verteilung $\pi^-(\cdot)$ über $(\Theta, \sigma(\Theta))$ heißt *ungünstigste Priori-Verteilung* für $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$, falls für alle anderen Priori-Verteilungen $\pi(\cdot)$ aus der Menge Π aller Verteilungen über $(\Theta, \sigma(\Theta))$ und für die Bayes-Aktion a^- zu $\pi^-(\cdot)$ gilt:

$$\mathbb{E}_{\pi^-} u(a^-) \leq \mathbb{E}_{\pi} u(a^-)$$

Proposition 2.84

Unter sehr schwachen Regularitätsbedigungen gilt in obiger Situation:
$\tilde{a}$ ist Maximin-Aktion.

In Proposition **??** wurde ein Kriterium dafür angegeben, wann eine Äquilisator-Aktion auch Maximin-(Minimax-)Aktion ist.
Bayes-Aktionen liefern ein *stärkeres* Kriterium, das auch *praktisch wichtiger* ist, weil die Feststellung, Bayes-Aktion zu sein, oft leichter zu treffen ist als die Feststellung, zulässige Aktion zu sein.

Proposition 2.85

Eine Äquilisator-Aktion, die zugleich Bayes-Aktion ist, ist auch Maximin-Aktion.

Beweis:
Ist $\pi(\cdot) > 0$, so ist jede Bayes-Aktion zulässig, und der Satz ergibt sich aus Satz 2.80.
Sei nun allgemeiner $\pi(\cdot)$ beliebig und a_B: 1) Bayes-Aktion
2) equalizer-Aktion

Dann gibt es

1) eine Bewertung π, sodass

$$\Phi(a_B, \pi) \geq \Phi(a, \pi) \quad \text{für } \textit{alle } a \in \mathbb{A} \tag{2.36}$$

2) eine Zahl c mit

$$u(a_B, \vartheta_j) = c \quad \text{für } \textit{alle } j = 1, \ldots, m \tag{2.37}$$

Angenommen, a_B wäre *nicht* eine Maximin-Aktion. Dann gäbe es eine Aktion a_M mit

$$\inf_{\Theta} u(a_M, \vartheta_j) > c\,. \tag{2.38}$$

Dann würde folgen

$$\Phi(a_M, \pi) = \mathbb{E}_\pi u(a_M) = \int_{>c} \underbrace{u(a_M, \vartheta)}_{\forall\vartheta (\text{vgl. } 2.38\ )} d\pi$$

$$> \int c d\pi \quad \overset{=}{2.37} \int u(a_B, \vartheta) d\pi \quad = \mathbb{E}_\pi u(a_B) = \Phi(a_B, \pi)$$

also

$$\Phi(a_M, \pi) > \Phi(a_B, \pi), \tag{2.39}$$

und a_B wäre keine Bayes-Aktion.
Widerspruch.