1.3.5 Aktienkauf (natürlich stark vereinfacht)

1.3.6 Produktionsplanung unter Szenarien

- q Güter

- $\mathbb{A} \subseteq (\mathbb{R}_0^+)^q$ beschrieben durch Kapazitätsbeschränkungen

- $$a = \begin{pmatrix} a[1] \\ \vdots \\ a[q] \end{pmatrix}$$
  mit $a[\ell]$: Produktion von $a[\ell]$ Einheiten von Gut ℓ, $\ell = 1, \ldots, q$

- Umweltzustand ϑ: Szenario (mögliche Entwicklung des Marktes)

- Umsätze unter veschiedenen Szenarien ergeben Nutzenfunktionen:

$$u : \mathbb{A} \times \Theta \to \mathbb{R}$$
$$(a, \vartheta) \mapsto u(a, \vartheta)$$

- Einfache Form: Stückpreisbasiert; unter Nichtsättigungsannahme; Vektor $c(\vartheta)$ mit $c[\ell](\vartheta)$: Stückpreis für Gut ℓ bei Szenario ϑ, $\ell = 1, \ldots, q$, dann

$$u(a, \vartheta) = a'c(\vartheta) = \sum_{\ell=1}^{q} a[\ell] \cdot c[\ell](\vartheta)$$

bzw. bei Interpretation von $c(\vartheta)$ als Kosten:

$$\mathrm{l}(a, \vartheta) = \sum_{\ell=1}^{q} a[\ell] \cdot c[\ell](\vartheta)$$

1.3.7 Einbettung stat. Tests in die Entscheidungstheorie I: der datenfreie Kern eines Testproblems

1.3.8 Einbettung der Parameterschätzung in die Entscheidungstheorie: der datenfreie Kern eines Schätzproblems

1.4 Randomisierte Aktionen, Konvexität

1.4.1 Konvexe Menge

Def. 1.7 (konvexe Mengen)

Seien $\mathbb{V}$ ein Vektorraum und $z_1, \ldots, z_n$ Elemente von $\mathbb{V}$.

a) Mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda_\ell \leq 1, \ell = 1, \ldots, n$, und $\sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell = 1$ sowie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{V}$ heißt

$$z := \lambda_1 \cdot z_1 + \lambda_2 \cdot z_2 + \ldots + \lambda_n \cdot z_n \tag{1.6}$$

Konvexkombination von $z_1 \ldots z_n$.

b) Für $x, y \in \mathbb{V}$ heißt die Menge

$$[x, y] := \{\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y | 0 \leq \lambda \leq 1\} \tag{1.7}$$

aller Konvexkombinationen von x und y *Verbindungsstrecke* zwischen x und y.

c) Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{V}$ heißt *konvex*, wenn für alle $z_1, z_2 \in \mathcal{M}$ gilt:

$$z_1 \in \mathcal{M}, z_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow [z_1, z_2] \subseteq \mathcal{M}\,.$$

Bsp. 1.9 (Beispiele für konvexe Mengen)

Lemma 1.10 (Äquivalentes Kriterium)

$\mathcal{M}$ ist konvex im Sinne von Definition 1.7 genau dann, wenn gilt:

$$\forall q, \lambda_1, ..., \lambda_q \geq 0, \sum_{l=1}^{q} \lambda_l = 1, z_1, ..., z_q \in \mathcal{M} \text{ gilt} : \sum_{l=1}^{q} \lambda_l z_l \in \mathcal{M}$$

1.4.2 Mischungen von Verteilungen

Bem. 1.11 (Mischungen von Verteilungen)

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\mathcal{P}$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

Gegeben seien q Elemente $p_1(\cdot), \ldots, p_q(\cdot) \in \mathcal{P}$ (also Wahrscheinlichkeitsmaße) und reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ mit $0 \leq \lambda_\ell \leq 1,\ \ell = 1, \ldots, q$, und $\sum_{\ell=1}^{q} \lambda_\ell = 1$.

Definiert man die *Mischung* $\bar{p}(\cdot)$ von $p_1(\cdot), \ldots, p_q(\cdot)$ vermöge

$$\bar{p}(A) = \sum_{\ell=1}^{q} \lambda_\ell p_\ell(A), \quad A \in \mathcal{A}, \tag{1.8}$$

so ist $\bar{p}(\cdot)$ wieder ein Element von $\mathcal{P}$. Die Menge $\mathcal{P}$ ist folglich konvex.

Ferner gilt auch für $k \in \mathbb{N}$: Ist X k-fach integrierbar bzgl. $p_1(\cdot), p_2(\cdot), ..., p_q(\cdot)$, so ist X auch k-fach integrierbar bezüglich $\bar{p}(\cdot)$. Für die Momente um 0(!) gilt dann auch

$$\mathbb{E}_{\bar{p}(\cdot)} X^k = \sum_{l=1}^{q} \lambda_\ell \mathbb{E}_{p_\ell} X^k \tag{1.9}$$

Haben $p_1(\cdot), ..., p_q(\cdot)$ die λ-Dichten bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktionen (bzw. allgemeiner die ν-Dichten) $f_1(\cdot), ..., f_q(\cdot)$, so hat $\overline{p}(\cdot)$ die λ-Dichte bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion (bzw. allgemeiner die ν-Dichte)

$$\overline{f}(\cdot) = \sum_{\ell=1}^{q} \lambda_\ell \cdot f_\ell(\cdot). \tag{1.10}$$

Bem. 1.12

- Man beachte, dass im Allgemeinen für $\mathcal{P}$ nicht eine Standardklasse von Verteilungen gewählt werden kann. Zum Beispiel ist die Menge aller Normalverteilungen nicht abgeschlossen gegenüber Mischungen. Dies mag zunächst enttäuschen, gewährt aber andererseits große Flexibilität in der Modellierung, da man durch Mischen eben sehr komplexe Formen erzeugen kann.

- Die Beschränkung auf Momente um 0 in (1.4.2) ist wesentlich; bspw. Varianzen kann man nicht so einfach zusammenzählen.

1.4.3 Konvexe Hülle, konvexe Polyeder

Def. 1.13 (Konvexe Hülle)

Sei $\mathcal{M}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{V}$.

a) Der Schnitt aller konvexen Obermengen von $\mathcal{M}$ heißt *konvexe Hülle*. (Die konvexe Hülle von $\mathcal{M}$ ist also die „kleinste konvexe Menge, die $\mathcal{M}$ umfasst".)
   Schreibweise: $\operatorname{conv}(\mathcal{M})$

b) Ist $\mathcal{M}$ endlich, so heißt $\operatorname{conv}(\mathcal{M})$ auch *konvexes Polyeder (Polytop)*.

Bem. 1.14

- Polyedrische Menge: Schnitt endlich vieler „Halbräume“
  Konvexes Polyeder : beschränkte polyedrische Menge

- Der Begriff „konvexes Polyeder“ wird in der Literatur nicht ganz einheitlich gebraucht. Gelegentlich werden alle Mengen, die sich als Schnitt endlich vieler Halbräume darstellen lassen als konvexe Polyeder bezeichnet.Die Vorlesung folgt der Konvention, solche Mengen als polyedrische Mengen zu bezeichnen. Man kann zeigen, dass ein Polyeder im Sinne der Vorlesung dann genau eine polyedrische Menge ist, die zusätzlich beschränkt ist. Im $\mathbb{R}^k$ werden die die Halbräume begrenzenden Hyperebenen als Begrenzungslinien bezeichnet.

Proposition 1.15 *Andere Charakterisierung der konvexen Hülle*

Die konvexe Hülle $\operatorname{conv}(\mathcal{M})$ ist die Menge aller Konvex-Kombinationen von Punkten aus $\mathcal{M}$:

$$\operatorname{conv}(\mathcal{M}) =$$

$$= \left\{ \sum_{\ell=1}^{q} \lambda_\ell z_\ell \;\middle|\; \sum_{\ell=1}^{q} \lambda_\ell = 1, q \in \mathbb{N},\ 0 \leq \lambda_\ell \leq 1,\ z_\ell \in \mathcal{M}, \ell = 1, \ldots, q \right\}$$

Bsp. 1.17 (nach Büning / Naeve / Trenkler / Waldmann) *(2000, p. 327f, 333f)*

Dieses Beispiel ist typisch für die Produktionsplanung (vgl. Beispiel); es wird in Kapitel 1.5 immer wieder verwendet.

Ein Unternehmer stelle die Produkte P_1 und P_2 her. Die dazu benötigten Mittel sind wie folgt beschränkt:

Maschine:	maximal 1200h
Rohstoffe:	maximal 3000 Mengeneinheiten (ME)
Arbeitskraft:	maximal 125h

und verteilen sich wie folgt auf je eine Mengeneinheit des Produkts $P_\ell, \ell = 1, 2$

	P_1	P_2
Maschine	3h	2h
Rohstoff	5ME	10ME
Arbeitskraft	0h	0.5h

a) Beschreiben Sie die Menge aller möglichen Produktionsmengen P_1 und P_2, die mit den vorgegebenen Beschränkungen verträglich sind!

b) Veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis graphisch!

c) Welche Produktionsmengen nützen die vorhandenen Produktionsfaktoren so weit wie möglich aus?

1.4.4 Extremalpunkte

Bem. 1.19 *Man kann zeigen: Die Eckpunkte eines konvexen Polyeders $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^k$ sind alle Punkte, die folgende beide Bedingungen erfüllen:*

i) x *ist ein Schnittpunkt von (mindestens)* k *Begrenzungslinien.*

ii) $x \in \mathcal{M}$.

Bsp. 1.21 (Eckpunkte)

Satz 1.23 (Extremalpunkte)

a) Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, nichtleer, abgeschlossen und beschränkt.
Dann gilt:

a1) $\mathcal{E}(\mathcal{M}) \neq \varnothing$

a2) Jede lineare Funktion $f : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ nimmt ihr Maximum und ihr Minimum auf $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ an.

b) Ein konvexer Polyeder ist die konvexe Hülle seiner Extremalpunkte.

Bem. 1.24 (zu a2))

- Der Punkt a2) ist von extremer praktischer Bedeutung; insbesondere bildet er die Grundlage der linearen Optimierung (siehe später), also des Optimierens linearer Funktionen unter linearen Nebenbedingungen. Er führt das Auswerten der Funktion über unendlicher Menge auf das Auswerten von endlich vielen Punkten zurück.

- Für die Statistik ist a2) auch deshalb interessant, da der Erwartungswert eine lineare Funktion (bzw. ein lineares Funktional) in den zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsmaßen ist.

1.4.5 Randomisierte Aktionen

Def. 1.25 (randomisierte (gemischte Aktionen))

Sei $\mathbb{A}$ die Aktionenmenge eines datenfreien Entscheidungsproblems $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ (und $\sigma(\mathbb{A})$ eine σ-Algebra über $\mathbb{A}$, die alle Einpunktmengen $\{a\} \in \mathbb{A}$ enthält.)
Dann heißt jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{A}, \sigma(\mathbb{A}))$ *randomisierte (gemischte)* Aktion.
Die Menge aller randomisierten Aktionen auf $(\mathbb{A}, \sigma(\mathbb{A}))$ werde mit $\mathcal{M}^{\sigma(\mathbb{A})}(\mathbb{A})$ bezeichnet. Ist klar, welche σ-Algebra verwendet wird, so schreibt man kurz $\mathcal{M}(\mathbb{A})$.

Bem. 1.26 (Zur Semantik einer randomisierten Aktion)

Sei $\mathbb{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dann besteht die randomisierte Aktion $\widetilde{a}(\cdot) \in \mathcal{M}(\mathbb{A})$ aus folgender Handlungsvorschrift:
Führe ein Zufallsexperiment auf $\{1, \ldots, n\}$ mit $p(\{i\}) = \widetilde{a}(\{a_i\}), \quad i = 1, \ldots, n$, durch und wähle Aktion a_i genau dann, wenn i eintritt.
D.h. es wird mit Wahrscheinlichkeit $\widetilde{a}(\{a_i\})$ die Aktion a_i gewählt.
Man schreibt oft

$$\widetilde{a} = \begin{bmatrix} a_1, & \ldots, & a_n \\ \widetilde{a}(\{a_1\}), & \ldots, & \widetilde{a}(\{a_n\}) \end{bmatrix}.$$

Wählt man $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ als Aktionenmenge, so kann man darauf aufbauend ein eigenes Entscheidungsproblem formulieren. Dazu ist es noch nötig, den Nutzen/Verlust geeignet zu definieren (als Erwartungswert).

Def. 1.27 (gemischte Erweiterung)

Gegeben sei ein datenfreies Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ und eine geeignete σ-Algebra $\sigma(\mathbb{A})$ auf $\mathbb{A}$. Dann heißt das datenfreie Entscheidungsproblem $(\mathcal{M}^{\sigma(\mathbb{A})}(\mathbb{A}), \Theta, \widetilde{u}(\cdot))$ mit

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(\cdot):\ \mathcal{M}^{\sigma(\mathbb{A})} \times \Theta &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\widetilde{a}, \vartheta) \qquad &\mapsto \widetilde{u}(\widetilde{a}, \vartheta) \end{aligned}$$

und

$$\widetilde{u}(\widetilde{a}, \vartheta) := \mathbb{E}_{\widetilde{a}}[u(a, \vartheta)] = \int u(a, \vartheta)\ \mathrm{d}\widetilde{a}(a) \tag{1.11}$$

die *gemischte Erweitung* von $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ (bzgl. $\sigma(\mathbb{A})$).

Bem. 1.28 (zu Def.1.27)

- Die Verwendung des allgemeinen Maßintegrals erlaubt die simultane Betrachtung des stetigen und diskreten Falls sowie die Berücksichtigung gemischt stetig/diskreter Verteilungen. Insbesondere gilt:
  Ist $\widetilde{a}(\cdot)$ ein (Lebesgue-)stetiges Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte $\widetilde{f}(\cdot)$, so ist
  $$\widetilde{u}(\widetilde{a},\vartheta) = \int_{\mathbb{A}} u(a,\vartheta)\widetilde{f}(a)\,da\,. \tag{1.12}$$
  Ist $\widetilde{a}(\cdot)$ diskret mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $\widetilde{p}(\cdot)$ auf $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, \ldots,\}$, so ist
  $$\widetilde{u}(\widetilde{a},\vartheta) = \sum_{i=1}^{n} u(a_i,\vartheta)\widetilde{p}(a_i)\,. \tag{1.13}$$

- Beachte Formel (1.11) ist eine definitorische Festlegung, die zwar plausibel ist, aber keineswegs logisch zwingend.

- Die gemischte Erweiterung ist also wieder ein datenfreies Entscheidungsproblem. Man braucht folglich bei allgemeinen Definitionen und Sätzen nicht zu unterscheiden, ob ein „ursprüngliches Entscheidungsproblem“ vorliegt oder die zugehörige gemischte Erweiterung.

Bem. 1.29 (reine Aktionen)

Die randomisierten Aktionen der Form $\widetilde{a}(\cdot) = \delta_{\{a\}}, \delta_{\{a\}} \in \mathbb{A}$ (Dirac-Maß = Einpunktmaß in der Menge $\{a\}$) werden als *reine Aktionen* bezeichnet und mit $a \in \mathbb{A}$ identifiziert.

Bem. 1.30 (Vom Sinn und Unsinn randomisierter Aktionen)

Korollar 1.31

$\mathcal{M}^{\sigma(\mathbb{A})}$ aus Definition 1.25 ist konvex.

Beweis:

Bem. 1.32 (Geometrische Deutung randomisierter Aktionen)

- $|\Theta| = m < \infty, \quad |\mathbb{A}| = n < \infty$

- a_i wurde mit Nutzenvektor $(\vec{u}_i = u(a_i, \vartheta_1), u(a_i, \vartheta_2), ..., u(a_i, \vartheta_m))^T = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{im})^T$ identifiziert (vgl. Bem. (1.5)) In Zeichen $a_i \widehat{=} \vec{u}_i$.

- $\widetilde{a} = \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_i & \ldots & a_n \\ p_1 & \ldots & p_i & \ldots & p_n \end{bmatrix}$ mit $p_i = p(\{a_i\})$ hat definitionsgemäß (vgl. Def. 1.27) den Nutzenvektor

$$\vec{u} = (\sum_{i=1}^{n} p_i u_{i1}, \sum_{i=1}^{n} p_i u_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} p_i u_{im})^T \tag{1.14}$$

Vektoriell sind in der direkten NutzenreprÃsentation (vgl. Bemerkung) durch die Identifizierung von randomisierten Aktionen mit ihrem Nutzenvektor dann randomisierte Aktionen und Aktionen, die ja mit ihrem Nutzenvektor identifiziert wurden, Objekte vom demselben Typ, nämlich Punkte des $\mathbb{R}^m$.
Es ist (Rechenregel für Vektoren)

$$\widetilde{a} \widehat{=} \vec{u} = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n$$

Also ist jede randomisierte Aktion eine Konvexkombination von reinen Aktionen und umgekehrt.

Satz 1.33 (randomisierte Aktionen als konvexe Hülle)

Sind Θ und $\mathbb{A}$ endlich, so gilt $\mathcal{M}(\mathbb{A}) \widehat{=} \mathrm{conv}(\mathbb{A})$. Damit ist also $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ ein konvexes Polyeder.