Aufgabe 1

Aus der Vorlesung (Bsp. 2.95) ist bekannt, dass für eine i.i.d. Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n) = \boldsymbol{X}$ normalverteilter Zufallsgrößen mit $\mathbb{E}(X_i) = \mu \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ Folgendes gilt. Ist σ^2 bekannt und wählt man als Priori-Verteilung für μ eine Normalverteilung mit den Parametern ν und ρ^2, so ist die Posteriori-Verteilung $\pi(\mu|\boldsymbol{x})$ nach Beobachtung von $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ eine Normalverteilung mit den Parametern ν' und $\rho^{2\prime}$ mit

$$\nu' \quad = \quad \frac{\bar{x}\,\rho^2 + \nu\,{}^{\sigma^2}\!/_{n}}{\rho^2 + {}^{\sigma^2}\!/_{n}}$$

und

$$\rho^{2\prime} \quad = \quad \frac{\rho^2\,{}^{\sigma^2}\!/_{n}}{\rho^2 + {}^{\sigma^2}\!/_{n}}\ .$$

(a) Zeigen Sie, dass man den MPD-Schätzer als gewogenes Mittel aus dem Stichprobenmittel und dem Mittelwert der Priori-Verteilung schreiben kann!

(b) Führen Sie eine ceteris-paribus-Analyse für die Posteriori-Parameter bzgl. σ^2, ρ^2, n gegen unendlich durch und diskutieren Sie ihre Ergebnisse inhaltlich!

(c) Betrachten Sie nun den Fall $\rho^2 = {}^{\sigma^2}\!/_{n}$. Welche Posteriori-Verteilung würde man bei

   (i) $\bar{x} = 0.9$ und $\nu = 1.1$ und

   (ii) $\bar{x} = -100$ und $\nu = 102$

   erhalten? Diskutieren Sie ihr Ergebnis!

Aufgabe 2

Betrachten Sie erneut das Investitionsproblem aus den Kapiteln 1.3 bzw. 1.6 mit den Handlungsalternativen:

a_1	Investition tätigen
a_2	Investition nicht tätigen

den Umweltzuständen:

θ_1	Besserung der Konjunktur
θ_2	Stagnation
θ_3	Konjunktur fällt

der Nutzentafel:

$u(a_i, \theta_j)$	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	10 000	2 000	-15 000
a_2	1 000	1 000	0

und der Informationsstruktur (Konjunkturtest):

$P_{\theta_j}(\{X = x_i\})$	x_1	x_2	x_3
θ_1	0.6	0.3	0.1
θ_2	0.2	0.4	0.4
θ_3	0.1	0.4	0.5

mit:

x_1	Konjunktur wird voraussichtlich steigen
x_2	Stagnation wird erwartet
x_3	Konjunktur wird voraussichtlich fallen

(a) Ermitteln Sie die optimale Entscheidungsfunktion d^* nach dem Laplace-Kriterium direkt über das zugehörige Auswertungsproblem!

(b) Bestimmen Sie die optimale Entscheidungsfunktion d^* nach dem Laplace-Kriterium mit Hilfe des Hauptsatzes der Bayes-Entscheidungstheorie (Satz 2.103)!

Sie können für Ihre Bearbeitung des Aufgabenteils (a) die nachfolgende Tabelle verwenden:

$U(d_{i_1,i_2,i_3}, \theta_j)$	θ_1	θ_2	θ_3	
$d_{1,1,1}$				
$d_{1,1,2}$				
$d_{1,2,1}$				
$d_{1,2,2}$				
$d_{2,1,1}$				
$d_{2,1,2}$				
$d_{2,2,1}$				
$d_{2,2,2}$				

Notation: d_{i_1,i_2,i_3} bezeichnet die Entscheidungsfunktion $d_{i_1,i_2,i_3} : \mathcal{X} \to \mathbb{A}$ mit $d_{i_1,i_2,i_3}(x_1) = a_{i_1}$, $d_{i_1,i_2,i_3}(x_2) = a_{i_2}$ und $d_{i_1,i_2,i_3}(x_3) = a_{i_3}$. Z.B. bezeichnet $d_{1,2,2}$ die Entscheidungsfunktion, die der Beobachtung $X = x_1$ die Aktion a_1 und den Beobachtungen $X = x_2$ oder $X = x_3$ die Aktion a_2 zuordnet.