Hilberts 23 Probleme

6. -12. August 1900:

Parallel zur Pariser Weltausstellung fand der zweite internationale Mathematikerkongress statt.

Es nahmen 226 Gelehrte aus aller Welt teil.

Der damals 39-jährige Hilbert galt als einer der führenden deutschen Mathematiker und wurde gebeten, ein Grundsatzreferat zu halten.

David Hilbert (1862–1943)

Erwartung:

Eine Art „Festrede" zur Jahrhundertwende mit einer „Revue der großen Erfolge" in der Mathematik im vergangenen Jahrhundert.

Hilberts 23 Probleme

Statt eines Rückblicks: ein kühner Blick in die Zukunft;
die einleitenden Worte waren:

Wer von uns würde nicht gerne den Schleier lüften,
unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen
auf die bevorstehenden Fortschritte unserer Wissenschaft
und in die Geheimnisse ihrer Entwicklung
während der künftigen Jahrhunderte!

Welche besonderen Ziele werden es sein,
denen die führenden mathematischen Geister
der kommenden Geschlechter nachstreben?
Welche neuen Methoden und neuen Tatsachen werden
die neuen Jahrhunderte entdecken –
auf dem weiten und reichen Felde mathematischen Denkens?

D. Hilbert: Mathematische Probleme – Vortrag Paris, 8.8.1900.

Hilberts 23 Probleme

„Man lege sich irgend ein bestimmtes ungelöstes Problem vor, [...].
So unzugänglich diese Probleme uns erscheinen und so ratlos wir zur Zeit ihnen gegenüber stehen - wir haben dennoch die sichere Ueberzeugung, daß ihre Lösung durch eine endliche Anzahl rein logischer Schlüsse gelingen muß.

Ist dieses Axiom von der Lösbarkeit eines jeden Problems eine dem mathematischen Denken allein charakteristische Eigentümlichkeit, oder ist es vielleicht ein allgemeines dem inneren Wesen unseres Verstandes anhaftendes Gesetz, daß alle Fragen, die er stellt, auch durch ihn einer Beantwortung fähig sind?
Trifft man doch auch in anderen Wissenschaften alte Probleme an, die durch den Beweis der Unmöglichkeit in der befriedigendsten Weise und zum höchsten Nutzen der Wissenschaft erledigt worden sind. „

Wir müssen wissen, und wir werden wissen.

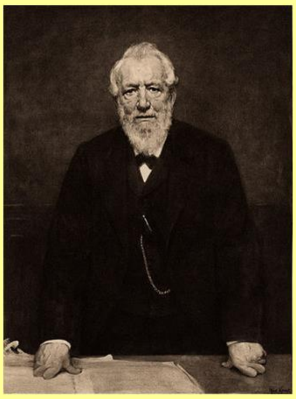
„Diese Überzeugung von der Lösbarkeit
eines jeden mathematischen Problems
ist uns ein kräftiger Ansporn
während der Arbeit;
wir haben in uns den steten Zuruf:

Da ist das Problem, suche die Lösung.
Du kannst sie durch reines Denken finden;
***denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus.**"*

David Hilbert (1862–1943)

Hilbert plädiert damit für einen Optimismus in der Forschung, der selbstgesetzte Beschränkungen des Denkens ablehnt.

D. Hilbert: Mathematische Probleme – Vortrag auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris, 8.8. 1900.



Angeregt durch die zeitgenössische Hirnforschung.

1872: Rede
Über die Grenzen des Naturerkennens

„Ignoramus et ignorabimus"

Emil Heinrich Du Bois-Reymond (1818–1896), deutscher Physiologe

Über die Grenzen des Naturerkennens

Rede, 45. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte 1872 in Leipzig

Naturerkennen ist für ihn das "Zurückführen der Veränderungen in der Körperwelt auf Bewegungen von Atomen.

Dann, so bemerkt er, fühlt sich unser "Kausalitätsbedürfnis vorläufig [...] befriedigt"

Über die Grenzen des Naturerkennens

Rede, 45. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte 1872 in Leipzig

Unerkennbar sei zum einen
das Wesen von Materie

Nie werden wir besser als heute wissen,
was, wie Paul Erman zu sagen pflegte,
"hier", wo Materie ist, "im Raum spukt".
Auch spukt es bei den Kräften,
die auf Materie wirken,
auch sie bleiben unerkennbar.


ÜBER DIE GRENZEN
NATURERKENNENS.
EIN VORTRAG
ZWEITEN ÖFFENTLICHEN SITZUNG
DEUTSCHER NATURFORSCHER UND ÄRZTE
EMIL DU BOIS-REYMOND.
ZWEITE AUFLAGE.
LEIPZIG,
VERLAG VON VEIT & COMP.

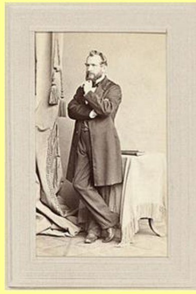
Über die Grenzen des Naturerkennens

Rede, 45. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte 1872 in Leipzig

Zum andern sei das Bewußtsein unerkennbar.

Er betrachtet die Frage nach der
Erklärbarkeit von Sinneseindrücke:

Ob wir die geistigen Vorgänge
aus materiellen Bedingungen
je begreifen werden, ist eine Frage,
ganz verschieden von der,
ob diese Vorgänge das Erzeugnis materieller
Bedingungen sind.
Jene Frage kann verneint werden,
ohne daß über diese etwas ausgemacht,
geschweige auch sie verneint würde.



„Wir wissen es nicht und wir werden es niemals wissen“

Rede, 45. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte 1872 in Leipzig

„Gegenüber den Rätseln der Körperwelt
ist der Naturforscher längst gewöhnt,
mit männlicher Entsagung sein „Ignoramus“ auszusprechen.

Im Rückblick auf die durchlaufene siegreiche Bahn
trägt ihn dabei das stille Bewußtsein, daß,
wo er jetzt nicht weiß, er wenigstens unter Umständen
wissen könnte, und dereinst vielleicht wissen wird.

Gegenüber dem Rätsel aber, was Materie und Kraft seien,
und wie sie zu denken vermögen,
muß er ein für allemal zu dem viel schwerer abzugebenden Wahrspruch
sich entschließen: „Ignorabimus“.“

Emil du Bois-Reymond: *Über die Grenzen des Naturerkennens.* 1872, Seite 464

„Wir wissen es nicht und wir werden es niemals wissen“

Rede, 45. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte 1872 in Leipzig

Emil Heinrich Du Bois-Reymond
(1818–1896),
deutscher Physiologe

Die damit ausgelöste heftige Debatte
über die Grenzen des Naturerkennens
wurde als „Ignorabimus-Streit“ bekannt.

Du Bois-Reymond galt zu jener Zeit
als ein wissenschaftlicher Wortführer
in Deutschland und auch international.

Seine Thesen erhielten so
eine besondere Aufmerksamkeit,
obwohl sie inhaltlich wenig Neues boten
und schon seit der Antike diskutiert werden.

David Hilbert (1862-1943)

Zurück zu Hilbert, der im Jahre 1900 auf dem
Mathematikerkongress das später so genannte
„Hilbert-Programm“ entwarf:

- Zug um Zug sollten alle mathematischen Disziplinen *widerspruchsfrei* nachgewiesen werden,
- als *Axiomatische Theorien*,
  d. h. als Sammlungen von wahren Aussagen
  - in einer formalen Sprache
  - klar definiert
- *Schlußregeln*, mit denen aus diesen Axiomen Folgerungen gezogen werden können

Hilberts 23 Probleme

Unermeßlich ist die Fülle von Problemen in der Mathematik,
und sobald ein Problem gelöst ist, tauchen an dessen Stelle
zahllose neue Probleme auf.
Gestatten Sie mir im Folgenden, gleichsam zur Probe,
aus verschiedenen mathematischen Disciplinen
einzelne bestimmte Probleme zu nennen,
von deren Behandlung eine Förderung der Wissenschaft
sich erwarten läßt.

Hilberts 23 Probleme

Dann stellte Hilbert eine Liste von 23 ungelösten mathematischen Problemen aus Geometrie, Zahlentheorie, Logik, Topologie, Arithmetik, Algebra, ... vor.

Diese Probleme schienen ihm von zentraler Bedeutung zu sein; von ihrer Lösung versprach er sich einen wesentlichen Fortschritt auf den entsprechenden Gebieten.

Diese später so genannten Hilbertschen Probleme wurden zur Leitschnur ganzer Generationen von Mathematikern, und die Lösung eines jeden Problems wurde als große Leistung angesehen.

Die meisten Probleme gelten heute als gelöst.

Hilberts 23 Probleme

Einige Probleme sind bis heute ungelöst oder nur teilweise gelöst.
Das berühmteste ungelöste Problem ist die Frage nach den Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion (Hilberts 8. Problem).

Bei manchen der von Hilbert aufgezeigten Probleme wurde deren **prinzipielle Unlösbarkeit** bewiesen.

Der berühmteste Fall ***eines unlösbaren Problems*** ist die Forderung nach einem Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Axiome der Arithmetik (Hilberts 2. Problem).

Im Jahre 1930 bewies Kurt Gödel, dass diese Forderung unerfüllbar ist.

Wir müssen wissen, und wir werden wissen.

David Hilbert
(1862–1943)
deutscher Mathematiker

30 Jahre später formulierte Hilbert in einem Artikel:

„Einst sagte der Philosoph Comte – in der Absicht ein gewiss unlösbares Problem zu nennen –, daß es der Wissenschaft nie gelingen würde, das Geheimnis der chemischen Zusammensetzung der Himmelskörper zu ergründen.

Wenige Jahre später wurde durch die Spektralanalyse durch Kirchhoff und Bunsen dieses Problem gelöst, und heute können wir sagen, daß wir die entferntesten Sterne als wichtigste physikalische und chemische Laboratorien in Anspruch nehmen, wie wir solche auf der Erde gar nicht finden.

Der wahre Grund, warum es Comte nicht gelang, ein unlösbares Problem zu finden, besteht meiner Meinung nach darin, daß es ein solches gar nicht gibt.“

David Hilbert: Naturerkennen und Logik. *Naturwissenschaften* 1930, S. 959–963

Hilberts zweites Problem:

Fragestellung: Sind die arithmetischen Axiome widerspruchsfrei?

Lösung: Nach dem Unvollständigkeitssatz von Kurt Gödel kann diese Frage nicht mit Hilfe der arithmetischen Axiome beantwortet werden.

Giuseppe Peano hatte 1889 ein arithmetisches Axiomensystem beschrieben, das die Fundierung der Mathematik festlegen sollte.

Hilbert war der Überzeugung, dass es damit möglich sein müsste zu zeigen, dass nur von dieser Grundlage ausgehend kein Widerspruch erzeugt werden kann.

Diese Hoffnung zerstörte Gödel, der 1930 mit seinem Unvollständigkeitssatz zeigte, dass dies nicht unter ausschließlicher Verwendung der Peano-Axiome möglich ist.

Hilbert-Programm

- Hilbert nahm an 1), dass die Prädikatenlogik 1. Stufe eine geeignete Sprache sei.
- Hilbert nahm an 2), dass alle mathematischen Folgerungen in einem Logikkalkül formuliert werden können, der der axiomatisierten mathematischen Theorie zugrunde liegt.

Das war plausibel, weil Mathematiker seit Jahrhunderten intuitiv so vorgingen.

Beide Annahmen sind aber keine mathematischen Thesen und somit sind sie nicht beweisbar !

Kurt Gödel (1906-1978): Unentscheidbare Systeme

Erschütterung des Hilbert-Programms:

Kurt Gödel
(1906-1978)

1931:

Kurt Gödel zeigte, dass jedes hinreichend umfassende mathematische System Sätze enthält, die weder bewiesen, noch widerlegt werden können.

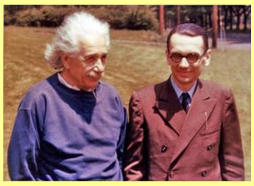
Berechenbarkeit

- Entscheidungsverfahren
- Algorithmus
  (effektive Methode zur Lösung
  eines gegebenen Problems)

Kurt Gödel
(1906-1978)

In Metamathematik und Logik:

Eine vollständige und eindeutige
Berechnungsvorschrift,
die bei richtiger Anwendung
nach endlich vielen Schritten
mit logischer Notwendigkeit
zur richtigen Antwort
(und niemals zu einer falschen Antwort)
führt.



Berechenbarkeit

Was ist eine Berechnungsvorschrift?

- intuitiv: eine Anweisung, Berechnungen durchzuführen

Was sind Berechnungen?

Hier gerät man in den Grenzbereich
zwischen Mathematik und Psychologie!

Die Mathematik

- kann die Fähigkeit des menschlichen Verstandes
  zu rechnen an Beispielen illustrieren,
- sie kann aber keine Definition dafür geben!

Alonzo Church (1903-1995)

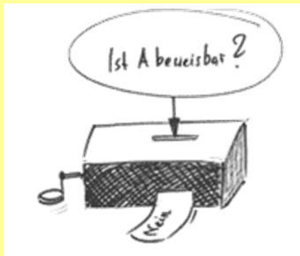
An unsolvable problem of elementary number theory,
The American Journal of Mathematics 58, 345-363,1935.

Nicht jede Frage nach
effektiver Berechenbarkeit ist lösbar!

Alonzo Church (1903-1995)

Könnte ein Computer vielleicht auch entscheiden,
ob eine vorgelegte Aussage A einen Beweis
besitzt?

Alonzo Churchs Antwort auf diese Frage: Nein.



Begründung:

Natürlich kann *A* wahr sein und einen
Beweis besitzen, den jemand findet.
Hingegen kann grundsätzlich kein
Computer existieren,
der zutreffend entscheidet,
ob mathematische Aussagen,
die man ihm eingibt, beweisbar sind.

Alan Mathison Turing (1912 - 1954)

- englischer Mathematiker und Logiker
- studierte 1932 - 1935, Mathematik und Logik
- begründete die logische Theorie einer
  universellen abstrakten Rechenmaschine
  (*Turing-Maschine*).
- ab 1945:Beteiligung an der Entwicklung des
  Collossus (automatische Großrechenmaschine).
- seit 1947 Beschäftigung mit dem Problem,
  ob und wie Computer lernen können. ´
- 1950 *Turing-Test*.
- ab 1950 Widmung kybernetischer Fragen
  der Biologie.
- Am 7. Juni 1954 starb Turing
  an einer Zyanidvergiftung.

1936: Turings Maschine: die Turingmaschine

Turing wollte einen präzisen Begriff der Berechenbarkeit definieren.

Dazu entwickelte er die Idee eines abstrakten Automaten.

- Dieser verfügt über
  endlich viele interne
  Zustände, die sich in
  endlicher Weise
  beschreiben lassen.
- Sein Speicher ist ein in
  beiden Richtungen
  unendlich langer
  Papierstreifen, der in nebeneinanderliegende Felder unterteilt ist;
  jedes Feld kann ein einzelnes Zeichen enthalten.

Turingmaschine, illustriert von Roger Penrose

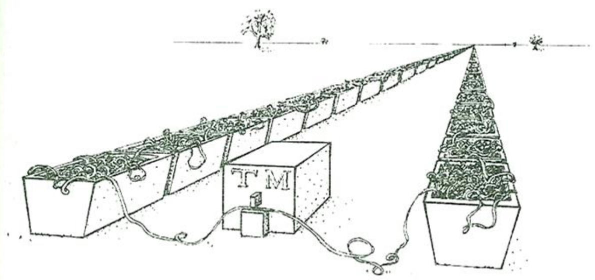


Fig. 2.1. A strict Turing machine requires an infinite tape!

Roger Penrose: *The Emperors New Mind*, Oxford University Press 1989.

1936: Turings Maschine: die Turingmaschine

Die Turingmaschine hat einen Schreib-Lese-Kopf,
der pro Arbeitsgang genau ein Feld auf dem Streifen bearbeiten kann;
sie kann:

- ein Zeichen vom Streifen lesen,
- ein Zeichen vom Streifen löschen und evtl. ein anderes an dessen Stelle schreiben
- den Streifen um ein Feld nach links oder nach rechts bewegen.

Bei jedem Arbeitsgang wird der Zustand der Maschine geändert.

Der Inhalt des Streifens kann als Eingabe verstanden werden.

Der Zustand der Maschine kann, wenn die Maschine angehalten hat,
als Ausgabe verstanden werden.

1936: Turings Maschine: die Turingmaschine

Trotz dieser sehr einfachen Einzelschritte ist es möglich,
weit komplexere Formen von Rechenvorschriften
in eine Turingmaschine zu „übersetzen“.

Selbst die umfangreichsten Programme heutiger Programmiersprachen
können letztendlich als Turingmaschinen aufgefasst werden,

Allerdings sind deren Anweisungsbücher sehr, sehr dick!!!

Beliebige algorithmische Verfahren können
auf Turingmaschinen übertragen werden!

Diese Behauptung entspricht der Church-These.

Diese These ist nicht beweisbar!

Turingmaschine: Konsequenzen

- Ein Problem ist algorithmisch *nicht* lösbar,
  wenn *keine* Turingmaschine die Lösung schaffen kann.

- Probleme dieser Art gibt es sehr , sehr viele!

- Die interessanten Fragen über Programme
  sind algorithmisch ***nicht*** lösbar!

- Z. B.: Es gibt *keinen* Algorithmus, der für ein vorgelegtes Programm entscheidet, ob es für jede Eingabe stoppt und eine Ausgabe liefert. (Halteproblem)

Turingmaschine

Als *Rechnen* gelten seit Turing Zeit
Prozesse,
wie sie in einer Turingmaschine
ausgeführt werden,

als *berechenbar* gilt,
was in einer Turingmaschine
berechnet werden kann.

Hilberts sechstes Problem:

Fragestellung: Wie kann die Physik axiomatisiert werden?

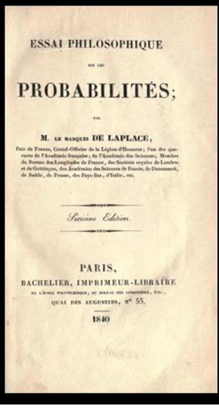
Lösung: Unbekannt.

Ursprünglich ging es Hilbert in diesem Punkt um
eine axiomatische Behandlung der Wahrscheinlichkeitstheorie
und der Mechanik.

Inzwischen gibt es mit der Relativitätstheorie und der Quantenphysik
weitaus tiefere Einblicke in die Struktur des Universums,
eine allgemeine axiomatische Formulierung der Physik
ist aber nicht in Sicht.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Pierre-Simon Laplace
(1749-1827)

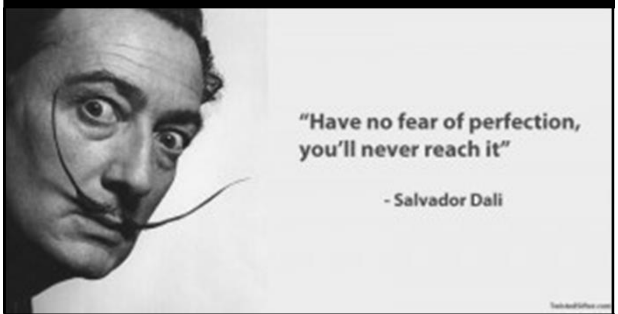

ESSAI PHILOSOPHIQUE
SUR LES
PROBABILITÉS;
PAR
M. LE MARQUIS DE LAPLACE,
Sixième Édition.
PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.
1840

Pierre-Simon Laplace: Essai Philosophique sur les Probabilités, Paris, 1814.

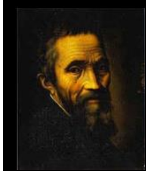
„Eine Intelligenz, die für einen bestimmten Augenblick
alle Kräfte kennte, von denen die Natur beseelt ist,
und die gegenseitige Lage aller Wesen, die sie ausmachen,
wenn sie überdies umfassend genug wäre,
alle diese Gegebenheiten der Analyse zu unterziehen,
dann würde sie in einer einzigen Formel die Bewegung
der größten Körper des Universums umfassen
und die des kleinsten Atoms:
nichts wäre für sie unbestimmt,
und Zukunft wie Vergangenheit wären vor ihrem Auge
gegenwärtig.

Der menschliche Geist bietet in der Vollendung, die er der Astronomie zu geben verstand, eine matte Skizze für diese Intelligenz."

Pierre-Simon Laplace
(1749-1827)



Wahrscheinlichkeitsrechnung vor Laplace



Gerolamo Cardano
(1501-1576)

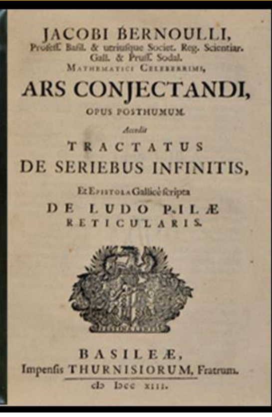
Christiaan Huygens
(1629-1695)

Blaise Pascal
(1623-1662)

Pierre de Fermat
(1601/7-1665)

Wahrscheinlichkeitsrechnung vor Laplace

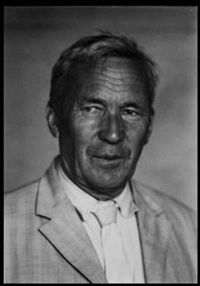
Jakob I. Bernoulli
(1654 jul./ 6. Januar 1655greg. -1705

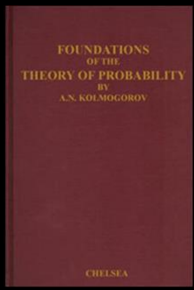

JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
CIƆ IƆCC XIII.

Wahrscheinlichkeitsrechnung vor Laplace

Ivo Schneider (Hrsg.):
Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung
von den Anfängen bis 1933.
Einführung und Texte,
Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1988

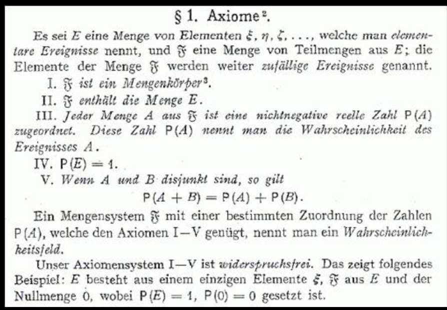
Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung





Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow (1903-1987)



§ 1. Axiome[2].

Es sei E eine Menge von Elementen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, welche man *elementare Ereignisse* nennt, und $\mathfrak{F}$ eine Menge von Teilmengen aus E; die Elemente der Menge $\mathfrak{F}$ werden weiter *zufällige Ereignisse* genannt.

I. *$\mathfrak{F}$ ist ein Mengenkörper*[3].

II. *$\mathfrak{F}$ enthält die Menge E.*

III. *Jeder Menge A aus $\mathfrak{F}$ ist eine nichtnegative reelle Zahl* $\mathsf{P}(A)$ *zugeordnet. Diese Zahl* $\mathsf{P}(A)$ *nennt man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.*

IV. $\mathsf{P}(E) = 1$.

V. *Wenn A und B disjunkt sind, so gilt*

$$\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B).$$

Ein Mengensystem $\mathfrak{F}$ mit einer bestimmten Zuordnung der Zahlen $\mathsf{P}(A)$, welche den Axiomen I—V genügt, nennt man ein *Wahrscheinlichkeitsfeld*.

Unser Axiomensystem I—V ist *widerspruchsfrei*. Das zeigt folgendes Beispiel: E besteht aus einem einzigen Elemente ξ, $\mathfrak{F}$ aus E und der Nullmenge 0, wobei $\mathsf{P}(E) = 1$, $\mathsf{P}(0) = 0$ gesetzt ist.

Theorie als Menge von Sätzen

Eine Theorie kann als eine Menge von Sätzen gedacht werden.

Ihre Aussagen sind durch die zwischen ihnen bestehenden Folgerungsbeziehungen strukturiert.

Da liegt die Darstellungsweise als sogenannte Axiomatisierung nahe.

Eine Theorie ***T*** ist axiomatisiert, wenn es eine Teilmenge von Aussagen dieser Theorie gibt, aus denen jeder andere Satz der Theorie logisch-begrifflich folgt.

Wahrheit empirischer Theorien

Wissenschaftliche Theorien erheben Anspruch auf Wahrheit.

Genauer:
Die Aussagen, die zu einer wissenschaftlichen Theorie gehören, sollen wahr sein.

- Der erste Weltkrieg begann nach dem Attentat von Sarajevo mit der Kriegserklärung Österreich-Ungarns an Serbien am 28. 7.1914 und endete mit dem Waffenstillstand von Compiègne am 11. 11.1918, der einen Sieg der aus der Triple-Entente hervorgegangenen Kriegskoalition bedeutete.

- 7 + 12 = 19

- Chemische Elemente und ihre Verbindungen erfüllen das Gesetz von der Erhaltung der Massen und die Gesetze von den konstanten und multiplen Proportionen.

Wahrheit empirischer Theorien

Wie erweisen sich solche Aussagen als wahr?

Genauer: Wie glauben Wissenschaftler, die Wahrheit von Aussagen erkennen zu können?

Um die Wirklichkeit, (bzw. besser: um die Wahrheit von Aussagen) zu erkennen, müssen Beobachtungen und Schlussfolgerungen zusammenspielen.

Wahrheit empirischer Theorien

Die Chemiker zur Zeit Daltons haben die chemischen Stoffe vor und nach ihrer Verbindung sorgfältig gewogen.

Sie schauten z. B. auf die Waage wenn diese anzeigte, mit wieviel Wasserstoff und mit wieviel Sauerstoff sie experimentierten.

Nach der Verbindung zu Wasser schauten sie erneut auf die Waage, die nun anzeigte wieviel Wasser entstanden war.

Die *Beobachtungsaussage In diesem Glas befinden sich jetzt 0,34 l Wasser.* war wahr, wenn der Zeiger der Waage auf der Skala den Markierungsstrich zu 0,34 l zeigte (*Beobachtungsdatum*).

Wahrheit empirischer Theorien

Nehmen wir an:

Die Chemiker stellen in allen ihren Experimenten fest, dass das gemessene Gewicht einer Stoffverbindung mit der Summe jener Gewichte übereinstimmt, die vor der Reaktion jeweils für die Ausgangsstoffe gemessen wurden.

Die *Beobachtungsaussage In jedem unserer Experimente blieb die Masse der beteiligten Stoffe bei der chemischen Verbindung erhalten.* darf dann wegen der endlich vielen Beobachtungen in den endlich vielen Experimenten als verifiziert (als „wahr" nachgewiesen") gelten

Aber:

Gesetz von der Massenerhaltung: *Immer, wenn Stoffe sich zu neuen Stoffen verbinden, bleibt die Masse der miteinander reagierenden Stoffe erhalten.*

Dieses Gesetz behauptet viel mehr, als wir jemals beobachten können!

Wahrheit empirischer Theorien

Das Gesetz von der Erhaltung der Massen

und die Gesetze von den konstanten und multiplen Proportionen

lassen sich niemals durch endlich viele Beobachtungen verifizieren.

Zu mehr als endlich vielen Beobachtungen ist kein Wissenschaftler imstande.

Wie lassen sich diese Aussagen begründen?

Chemische Gesetze

1. Prämisse: Die chemischen Elemente und ihre Verbindungen erfüllen die Atomhypothese und realisieren damit eine Struktur, wie sie z. B. Pakete aus verschiedene Sorten von Kugeln realisieren, wobei sich die Kugeln verschiedener Sorten durch ihr Gewicht unterscheiden.

2. Prämisse: In einer solchen Struktur gelten Gesetzmäßigkeiten, die im Fall der chemischen Elemente und ihrer Verbindungen die Gesetze von der Erhaltung der Massen und die beiden Gesetze von den konstanten und multiplen Proportionen sind.

Konklusion: Also erfüllen die chemischen Elemente und ihre Verbindungen das Gesetz von der Erhaltung der Massen und die Gesetze von den konstanten und multiplen Proportionen.

Wahrheit empirischer Theorien

Schon die 1. Prämisse besagt mehr, als wir beobachten können.

Hinzu kommt, dass sie von Atomen handelt, die auch nicht beobachtet werden können.

Es werden Gesetze für einzelne Sachverhalte,
die sich als einzelne Sachverhalte immerhin beobachten lassen
und schon oft beobachtet wurden,
auf Sätze über prinzipiell unbeobachtbare Objekte und Sachverhalte zurückgeführt.

Wahrheit empirischer Theorien

Die 2. Prämisse läßt sich dagegen mathematisch beweisen:

Beweis fur das Gesetz der konstanten Proportionen:

Wenn jede Verbindung aus einer festen Anzahl von Molekülen besteht, die sich ihrerseits aus k Atomen der Sorte A mit dem Gewicht g_A und m Atomen der Sorte B mit dem Gewicht l_B zusammensetzen, und wenn sich zwei unterschiedliche Stoffmengen der Verbindung von A- und B-Atomen nur in der Anzahl von Molekülen unterscheiden, dann bleiben die proportionalen Gewichtsanteile der Stoffe A und B in jeder der beiden Stoffmengen

$$\frac{m \cdot k \cdot g_A}{m \cdot l \cdot g_B \cdot} = \frac{k \cdot g_A}{l \cdot g_B} = \frac{n \cdot k \cdot g_A}{n \cdot l \cdot g_B}$$

konstant.

Diese Prämisse ist also unproblematisch, da mathematisch bewiesen.

Wahrheit empirischer Theorien

Angenommen: Chemiker haben in Experimenten mit einer Stoffverbindung für unterschiedliche Mengen unterschiedliche Anteile der Ausgangsstoffe gemessen!

Als ihr Ergebnis behaupten sie nun, dass ihre Beobachtungen den Satz:

In einigen unserer Experimente haben wir nicht-konstante Anteile der Ausgangsstoffe in verschiedenen Mengen derselben Stoffverbindungen gemessen.

verifizieren.

Diese Aussage widerspricht jetzt dem Gesetz von den konstanten Proportionen.

Da Prämisse 2 unproblematisch ist, widerspricht diese Aussage der Prämisse 1.

Eine der beiden Aussagen muss falsch sein.
(Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch).

Allgemeiner: Allgemeine wissenschaftliche Erklärung

1. Prämisse:
(aufgrund von Beobachtungen)
In Wirklichkeitsausschnitt ***W*** ist *p* der Fall.

2. Prämisse:
(nicht durch Beobachtungen verifizierbare Kernaussage einer Theorie)
Der Wirklichkeitsausschnitt ***W*** realisiert die Struktur ***S.***

3. Prämisse:
(als mathematisch beweisbarer Satz)
Ist in einem Wirklichkeitsausschnitt mit der Struktur ***S*** *p* der Fall, so ist auch *q* der Fall,

Konklusion:
(durch Beobachtung überprüfbar)
In ***W*** ist *q* der Fall.

Wahrheit empirischer Theorien

Nehmen wir nun an, dass unsere Beobachtungen
die Konklusion als falsch erweisen, also dass ***q*** nicht der Fall ist.

Dann müssen Prämisse 1 oder Strukturprämisse 2 falsch sein.

Das bedeutet aber, dass etwas an der Theorie selbst falsch ist.

Wahrheit empirischer Theorien

Eine Theorie ist nur dann wahr, wenn alle mit Hilfe der Theorie aus wahren Beobachtungsaussagen gefolgerten Beobachtungsaussagen sich ihrerseits in entsprechenden Beobachtungen bewahrheiten.

Eine Theorie heiβt „empirisch adäquat", wenn diese Bedingung erfüllt ist.

Die empirische Adäquatheit ist eine notwendige Bedingung für die Wahrheit einer Theorie. – Sie aber nicht hinreichend!

Selbst wenn sich jede Beobachtungskonsequenz einer Theorie bewahrheitet, ist damit nicht die Kernaussage der Theorie bewiesen:
Der Wirklichkeitsausschnitt ***W*** realisiert die Struktur ***S.***

Wahrheit empirischer Theorien

Kann man eine Theorie dann überhaupt jemals „wahr" nennen?

Es gibt Wissenschaftsphilosophen, die von der „Wahrheit" einer Theorie nicht reden wollen.

Stattdessen reicht es ihnen, wenn die Theorie
mit der entsprechenden Kernaussage empirisch adäquat ist.

Selbst das ist nun aber fraglich, denn es läßt sich von einer Theorie nicht definitiv beweisen, dass sie empirisch adäquat ist,

denn niemand kann die Wirklichkeitsausschnitte von Theorien vollständig beobachten bzw. überblicken.
Wir können stets auf neue Beobachtungen stoßen,
diese können völlig unerwartet sein, und jedes Mal kann es sein,
dass diese Beobachtungen der Theorie widersprechen.

Das komplexe Ideal der Wissenschaft

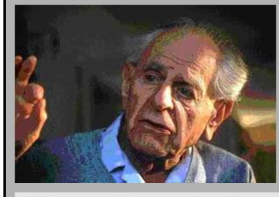
- das Ideal der Wahrheit
- das Ideal der Begründung
- das Ideal der Erklärung und des Verstehens
- das Ideal der Intersubjektivität
- das Ideal der Selbstreflektion

Wahrheit empirischer Theorien

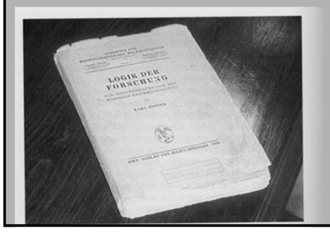
Die beiden ersten Ideale der Wissenschaft,
die Ideale der Wahrheit und der Begründung verlangen,
dass nur nachweislich wahre Behauptungen
akzeptiert werden dürfen.

Wir scheinen uns aber damit begnügen zu müssen,
wissenschaftliche Theorien schon dann zu akzeptieren,
wenn sie sich bis auf weiteres als empirisch adäquat bewähren.

Karl Raimund Popper (1902–1994)



Hauptwerk, 1934:
Logik der Forschung



Das *Falsifikationsprinzip* als Grundlage aller wissenschaftlichen Theoriebildung.

Kein wissenschaftliches System und keine wissenschaftliche Aussage kann absolute Gültigkeit beanspruchen; es hat als Arbeitshypothese lediglich vorläufigen Modellcharakter.

Wahrheit empirischer Theorien

Was ist zu tun, wenn Beobachtungen (Beobachtungsdaten) der Theorie widersprechen?

Popper

Lakatos

Feyerabend

Kuhn

Laudan

…

Argument:

Aufgrund eines Arguments beweisbare Prämisse:

Aus einem durch Beobachtung verifizierten Satz ***B*** und der Kernaussage der Theorie folgt eine durch Beobachtung überprüfbare Konklusion ***K***.

Aufgrund von Beobachtungen gilt:

Die Konklusion ***K*** ist falsch.

Beweisbares Schlussprinzip als der Argumentationstheorie:

Folgt aus Sätzen S_1, … S_n ein falscher Satz, so ist mindestens einer der Sätze S_1 oder …oder S_n falsch.

Konklusion:

Also ist die Kernaussage der Theorie falsch oder der scheinbar durch Beobachtungen verifizierte Satz ***B***.

Wahrheit empirischer Theorien

Vom Satz ***B*** hatten wir aber angenommen, dass er durch Beobachtungen verifiziert ist.

Warum nehmen wir Satz B zurück und nicht etwa die Kernaussage der Theorie?

Wahrheit empirischer Theorien

Die Chemiker zur Zeit Daltons haben die chemischen Stoffe vor und nach ihrer Verbindung sorgfältig gewogen.

Sie schauten z. B. auf die Waage wenn diese anzeigte, mit wieviel Wasserstoff und mit wieviel Sauerstoff sie experimentierten.

Nach der Verbindung zu Wasser schauten sie erneut auf die Waage, die nun anzeigte wieviel Wasser entstanden war.

Die *Beobachtungsaussage In diesem Glas befinden sich jetzt 0,34 l Wasser.* war wahr, wenn der Zeiger der Waage auf der Skala den Markierungsstrich zu 0,34 l zeigte (*Beobachtungsdatum*).

Wahrheit empirischer Theorien

Die Chemiker zur Zeit Daltons haben die chemischen Stoffe vor und nach ihrer Verbindung sorgfältig gewogen.

Sie schauten z. B. auf die Waage wenn diese anzeigte, mit wieviel Wasserstoff und mit wieviel Sauerstoff sie experimentierten.

Nach der Verbindung zu Wasser schauten sie erneut auf die Waage, die nun anzeigte wieviel Wasser entstanden war.

Aus den Angaben über die beteiligten Mengen Wasserstoff und Sauerstoff folgern sie mit Hilfe der Atomtheorie Daltons, dass bei der Reaktion 0,34 l Wasser entstanden sein muss.

Sie messen das Gewicht des entstandenen Wassers mit 0,12 l.

Wahrheit empirischer Theorien

Was muss jetzt passieren?

Müssen die Chemiker nun schließen, dass Daltons Atomtheorie falsch ist?

Nein, denn es kann alles Mögliche andere geschehen sein:

- die Waagenanzeige wurde falsch abgelesen;
- etwas Wasser wurde nach der Reaktion verschüttet;
- die Waage ist defekt;
- ….

Wahrheit empirischer Theorien

Am besten wiederholen die Chemiker das Experiment!

Dabei sind sie sehr sorgfältig und sie vergewissern sich, dass

- die Waagenanzeige richtig abgelesen wird;
- kein Wasser nach der Reaktion verschüttet wird;
- die Waage richtig funktioniert;
- ….

Wird nun der vorausberechnete Wert (0,34 l) beobachtet, so werden die Chemiker den früheren Versuch für irrelevant erklären; statt der Theorie geben sie also die früheren Beobachtungsaussagen preis!

Wahrheit empirischer Theorien

Aber:

Wie überzeugt man sich denn z. B. davon, dass

-
-
-
- die Waage richtig funktioniert;

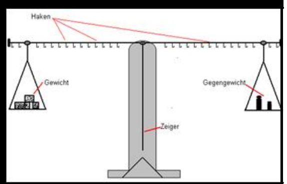
Dafür benutzt man eine Theorie, hier die Mechanik, genauer: die Teiltheorie der Statik …

Wahrheit empirischer Theorien

Ein Teil der Kernaussage der Mechanik der Waagen:

*Die beiden Arme einer Balkenwaage befinden sich in **waagerechter Gleichgewichtslage**, wenn für die Gewichte G_1 und G_2, mit denen die beiden Arme belastet werden, und für die Abstände l_1 und l_2, der beiden Gewichte vom Mittelpunkt der Waage gilt:*

$$l_1 \times G_1 = l_2 \times G_2.$$



Das ist eine Strukturbehauptung der Theorie „Mechanik der Waagen".

Will man also überprüfen, ob die Waage funktioniert, so wird diese Strukturbehauptung bereits als wahr unterstellt.

Wahrheit empirischer Theorien

Aber: Für die Strukturbehauptung der Theorie der Statik (der Waagen) gilt nun dasselbe, wie für die der Atomtheorie von Dalton:

- Es gibt auch für diese Strukturbehauptung keinen definitiven Beweis!

Um zu testen, ob Daltons Atomtheorie empirisch adäquat ist, müssen wir Gewichte auf Waagen messen.

Die Messungen sind nur dann korrekt, wenn die Waagen funktionieren.

Um zu testen, ob die Waagen funktionieren, müssen wir davon ausgehen, dass die Statik empirisch adäquat ist.

Beobachtungsaussagen sind theoriengeladen!