

Deduktive und induktive Aspekte statistischer Methoden

Wissenschaftshistorische und -philosophische Grundlagen

Felix Günther
Institut für Statistik
Ludwig-Maximilians-Universität München
Prof. Seising

17.05.2014



Abbildung : Statistik im Forschungsprozess (Uwe Saint-Mont)

Einleitung

- ▶ Wie entsteht Wissen?
- ▶ Deduktiv: Logisch strenges Ableiten von Folgerungen aus Prämissen
- ▶ Induktiv: Systematisieren von Erfahrungen und Beobachtungen
- ▶ Frage: Wie bewegt sich die Statistik in diesem Rahmen?

Einleitung

Wissenschaftstheorie

Deduktion

Induktion

Deduktiv-induktives Schema

Deduktion und Induktion in der Statistik

Neyman-Pearson Testtheorie

Orthodoxe Statistik

Statistische Modellierung

Angewandte Statistik

Zusammenfassung und Anmerkungen

Deduktivität und Induktivität in der Statistik

Wissenschaftstheorie und Statistik

Deduktion

- ▶ Schluss vom Allgemeinen aufs Spezielle
- ▶ Explanans: Gesetzmäßigkeiten (G) und Antezedenzbedingung (A) \Rightarrow Explanandum: Ereignis (E)
- ▶ Beispiel Mathematik:
Aufgaben-/Fragestellung: Axiome (G), Gegebenes (A), \Rightarrow Ergebnis (E)
- ▶ Rigides geschlossenes System logisch strenger Schlüsse \rightarrow hohe Sicherheit, ermöglicht Wahrheitsaussagen, allerdings: Ergebnisse resultieren aus selbst definiertem Explanans
- ▶ für empirische Forschung Abgleich mit „Realität“, also Beobachtungen notwendig

Induktion

- ▶ Schluss vom Speziellen aufs Allgemeine
- ▶ Induktionsproblematik: Es existieren keine eindeutigen, logisch zwingenden Schlüsse (David Hume)
- ▶ Historische Betrachtung empirischer Wissenschaften: Entwicklung häufig induktiv angetrieben
- ▶ immer präzisere (mathematische!) Formalisierung von Beobachtungen in allen entwickelten Wissenschaften
- ▶ Vorteil der induktiven Theoriebildung: Kontakt zur Empirie Grundlage
- ▶ Nachteil: Gefahr falscher Theorie aufgrund von (immer) unzureichender Beobachtung

Deduktiv-induktives Schema

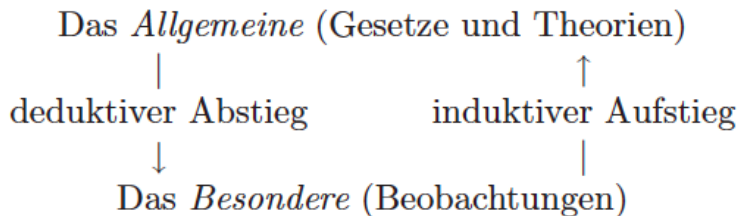


Abbildung : Deduktiv-induktives Schema (Saint-Mont, S. 59)

Einleitung

Wissenschaftstheorie

Deduktion

Induktion

Deduktiv-induktives Schema

Deduktion und Induktion in der Statistik

Neyman-Pearson Testtheorie

Orthodoxe Statistik

Statistische Modellierung

Angewandte Statistik

Zusammenfassung und Anmerkungen

Deduktivität und Induktivität in der Statistik

Wissenschaftstheorie und Statistik

Neyman-Pearson Hypothesentest

- ▶ Sei Θ Parameterraum; seien die Hypothesen $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs. $H_1 : \theta \in \Theta_1$, mit $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$
- ▶ $\phi(x)$ Teststatistik abhängig von expliziter Beobachtung/Stichprobe
- ▶ Ergebnis:
 $E_0 : \phi(x) = 0 \rightarrow H_0$ wird nicht abgelehnt
 $E_1 : \phi(x) = 1 \rightarrow H_0$ wird abgelehnt
- ▶ Definition α ($= 0.05/0.01/\dots$)
- ▶ E_1 falls x unter H_0 „zu extrem“ ist - Diese Menge an potentiellen Realisationen definiert Ablehnungsbereich der Nullhypothese R_α

Powerfunktion

- ▶ 2 mögliche Fehler:

$\theta \in \Theta_0, \phi(x) = 1 \dots$ Fehler 1. Art

$\theta \in \Theta_1, \phi(x) = 0 \dots$ Fehler 2. Art

- ▶ $\beta_\theta(\phi) = P_{X,\theta_i}(\phi(X) = 1) \dots$ „Gütefunktion“ von ϕ beschreibt die Wahrscheinlichkeit Nullhypothese für Stichprobe X aus Verteilung P_{X,θ_i} abzulehnen.

- ▶ Test zum Niveau α :

$\beta_\phi(\theta) \leq \alpha, \forall \theta \in \Theta_0 \dots P(E_1 | \theta \in \Theta_1) (= \text{Fehler 1. Art}) = \alpha$

- ▶ Powerfunktion:

$\beta_\phi(\theta), \forall \theta \in \Theta_1 \dots P(E_1 | \theta \in \Theta_1).$

\Rightarrow Auffinden des besten (UMP) Tests (abhängig von Testproblem)

Neyman-Pearson Hypothesentest

- ▶ ermöglicht durch mathematische Rahmen „objektiv“ (statistisch operationalisierte) Hypothesen zu falsifizieren
- ▶ Definition aller Rahmenbedingungen a-priori
- ▶ Existenz bestmöglicher Vorgehensweise a-priori
- ▶ Deduktive Vorgehensweise, Datenrealisation/Beobachtung x setzt ausschließlich „Räderwerk“ in Gang
⇒ Entscheidung
- ▶ streng genommen ist nur die Ablehnung von H_0 ein deduktiv-logischer Schluss.

Einleitung

Wissenschaftstheorie

Deduktion

Induktion

Deduktiv-induktives Schema

Deduktion und Induktion in der Statistik

Neyman-Pearson Testtheorie

Orthodoxe Statistik

Statistische Modellierung

Angewandte Statistik

Zusammenfassung und Anmerkungen

Deduktivität und Induktivität in der Statistik

Wissenschaftstheorie und Statistik

Orthodoxe Statistik

Der Neyman-Personsche Hypothesentest beispielhaftes Verfahren orthodoxer Statistik. Sie ist geprägt durch:

1. Statistik als angewandte Mathematik, frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
2. Festlegung möglichst vieler methodischer Schritte a priori
3. möglichst geplante Erhebung der Daten in Experiment (experimental design)
⇒ logischer Rahmen in dem auch Interpretation erfolgt (explizites, steuerbares, objektives Verfahren)

Orthodoxe Statistik

4. technische Begriffe: u.a. Stichprobenraum, dort definierte Verteilung, Gesetz der großen Zahlen, Qualität von Verfahren „in the long run“
5. geringe Rolle der konkret erhobenen Daten/Beobachtung x :
Zuvor (genau) definierte Aufgabe im festgelegten Rahmen
Entscheidung auf empirischer Basis zu treffen

Vorteile:

Objektivität von Aufbau, Durchführung und Interpretation;

Wahrscheinlichkeitsaussagen auf empirischer Basis

⇒ überzeugende Verfahren zur Überprüfung von Hypothesen

Einleitung

Wissenschaftstheorie

Deduktion

Induktion

Deduktiv-induktives Schema

Deduktion und Induktion in der Statistik

Neyman-Pearson Testtheorie

Orthodoxe Statistik

Statistische Modellierung

Angewandte Statistik

Zusammenfassung und Anmerkungen

Deduktivität und Induktivität in der Statistik

Wissenschaftstheorie und Statistik

Lineare Modelle

$$\begin{aligned}y_i &= \beta_0 + \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \epsilon_i \\ &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + \epsilon_i\end{aligned}$$

y_i ... Zielgröße

x_i ... Vektor der Einflussgrößen

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ Vektor der (aus Daten geschätzten) Koeffizienten

$\Rightarrow data = fit + residual$

ϵ ... Fehler in Daten, dabei: $\epsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$

(auf GLM übertragbar, Linkfunktion abhängig von Verteilungsannahme der y_i)

Generalisierte Lineare Modelle

- ▶ Gütemaße für das Gesamtmodell: z.B. Streuungszerlegung, R^2 , AIC, BIC
- ▶ Test jedes β_k möglich ($H_0 : \beta_k = 0$, $H_1 : \beta_k \neq 0$)
- ▶ Betrachtung der Verteilung der ϵ_i
- ▶ Grundsätzlich rein deduktive, theoriegeleitete (a priori) Konstruktion eines Modells und objektive Beurteilung des entsprechenden Fits möglich
- ▶ Schlüsse innerhalb des Modells dann streng logisch

Modellfindung

Tatsächliches Vorgehen überwiegend explorativ orientiert:

- ▶ Verteilungsannahme von Y im Modell aus Betrachtung der Daten
- ▶ Existenz verschiedener potenzieller Einflussvariablen und möglicher Zusammenhangsformen
- ▶ Modellkonstruktion als Kompromiss aus fachwissenschaftlicher Theorie, Fit und Komplexität
- ▶ Dieser kann explizit oder automatisiert gefunden werden (LASSO, Gütekriterien)

⇒ Modellbildung aus Beobachtung: klar induktives Vorgehen

Anmerkung zur Modellinterpretation

- ▶ Modellqualität: (I) Reliabilität und (II) Validität
- ▶ Statistik befasst sich hauptsächlich mit (I)
- ▶ (Philosophische) Ansätze zur Interpretation von Modellen:
 - ▶ reine Aufdeckung von Datenstrukturen (nicht-realistischer Empirismus, Positivismus, ...)
 - ▶ Strukturkomponente besitzt Entsprechung realer Welt (Realismus)
- ▶ pragmatisch: „wahres“ Modell existiert nicht, Modelle als Approximation der Wahrheit, Statistiker suchen bestes
- ▶ Komplexität und Masse an Modellen erschwert realistische Interpretation
- ▶ Abwägung notwendig

Einleitung

Wissenschaftstheorie

Deduktion

Induktion

Deduktiv-induktives Schema

Deduktion und Induktion in der Statistik

Neyman-Pearson Testtheorie

Orthodoxe Statistik

Statistische Modellierung

Angewandte Statistik

Zusammenfassung und Anmerkungen

Deduktivität und Induktivität in der Statistik

Wissenschaftstheorie und Statistik

Angewandte Statistik

- ▶ Daten im Vordergrund
- ▶ mehr oder weniger systematische Sammlung der Daten
- ▶ a posteriori Aufdeckung von Strukturen
- ▶ Lösung wissenschaftlicher Fragen durch Lernen aus Erfahrung
- ▶ Folge: enger Kontakt mit Empirie, Subjektivität bzw. Unsicherheit in Bezug auf Gültigkeit (Overfitting,...)

Beispiele angewandter Statistik

- ▶ nichtparametrische Modellierung
- ▶ Clusteranalyse
- ▶ Diskriminanzanalyse
- ▶ dimensionsreduzierende Verfahren
- ▶ ...

Einleitung

Wissenschaftstheorie

Deduktion

Induktion

Deduktiv-induktives Schema

Deduktion und Induktion in der Statistik

Neyman-Pearson Testtheorie

Orthodoxe Statistik

Statistische Modellierung

Angewandte Statistik

Zusammenfassung und Anmerkungen

Deduktivität und Induktivität in der Statistik

Wissenschaftstheorie und Statistik

Deduktivität und Induktivität in der Statistik

- ▶ unterschiedliche Vorstellungen der Art statistischer Methoden; bei Schluss auf Grundgesamtheit **immer** induktiver Schritt notwendig
- ▶ Orthodoxe Statistik:
Entwicklung aus Mathematik; historisch und öffentlich präsenter; prägt die Vorstellung der Statistik als Lieferant objektiver Entscheidungshilfen
in Praxis häufig unpraktikabel (komplexe Problemstellungen)
- ▶ Verzicht auf angewandte Methoden entspräche Verzicht auf Erkenntnisgewinn, allerdings: Aussagekraft beachten
- ▶ **Aufforderung:** genauere Kommunikation der Unsicherheit und Grenzen

Wissenschaftstheorie und Statistik

Wissenschaftstheorie/-philosophie . . .

- ▶ für ganzheitliche Blick auf Statistik notwendig
- ▶ viele (historische) Debatten statistischer Methoden auf sie rückführbar
- ▶ hilfreich für Beurteilung der Aussagekraft/Güte von statistischen Methoden
- ▶ kann Hilfe für sinnvolles Verhalten von Statistikern im Forschungsprozess auf dem Weg zu Erkenntnis liefern