5 Ausgewählte Aspekte der Bevölkerungsstatistik

5.4 Bevölkerungsvorausberechnungen

5.4.1 Das Leslie-Modell zur Bevölkerungsprognose

- Modell geht auf einen Artikel von P.H. Leslie zurück: Leslie (1945). On the Use of Matrices in certain Population Mathematics. Biometrika 33.
- 3 Komponenten der Bevölkerungsentwicklung: Geburten, Sterbefälle, Migration
- Bevölkerung wird nach Alter und Geschlecht gegliedert betrachtet
- zentrale Annahme: alters- und geschlechtsspezifische Geburten- und Sterberaten, sowie Wanderungssalden sind über die Zeit konstant

Hypothetische Population:

Alter x	$B_{w,x}(t_0)$	$B_{m,x}(t_0)$	$B_x(t_0)$
0	100	110	210
1	70	30	100
2	20	12	32

- altersspezifische Geburtenraten (bezogen auf 1 Mutter):

$$\mu_x = \frac{\text{von Müttern im Alter } x \text{ Lebendgeborene im Jahr } t_0}{\text{Frauen im Alter } x \text{ am } 31.12.t_0}$$

  Geburtenraten für die hypothetische Population: $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 0.2$

- Sexualproportion der Lebendgeborenen: $\gamma_0 = {}^{100}/_{110} = 0.9091$

- alters- und geschlechtsspezifische Übergangsraten $\pi_{w,x}$ und $\pi_{m,x}$ von einer Altersklasse x in die darauffolgende $x+1$:

$$\pi_{w,x} = \frac{L_{w,x+1}}{L_{w,x}} \quad \text{bzw.} \quad \pi_{m,x} = \frac{L_{m,x+1}}{L_{m,x}},$$

wobei $L_{w,x}$ und $L_{m,x}$ die durchschnittlichen Bestände im Altersjahr x aus den Sterbetafeln sind

Auszug aus der Sterbetafel für weibliche Mitglieder der hypothetische Population:

Alter x	l_x	d_x	p_x	q_x	L_x
0	100 000	20 000	0.8000	0.2000	90 000
1	80 000	48 000	0.4000	0.6000	56 000
2	32 000	32 000	0.0000	1.0000	16 000

Übergangsraten für die weibliche Teilpopulation: $\pi_{w,0} = 0.6222$, $\pi_{w,1} = 0.2857$

Bevölkerungsvorausberechnung nur für die weibliche Teilpopulation im Jahr $t_1 = t_0 + 1$:

- Annahme: keine Wanderungsbewegungen
- $\gamma_0 = {}^{10}\!/_{11}$ bedeutet $\kappa_w = {}^{10}\!/_{21}$
- Modell der Vorausberechnung wird durch sogenannte Leslie-Matrix $\mathbb{L}$ ausgedrückt

$$\mathbb{L}^{(w)} = \begin{pmatrix} \kappa_w\,\mu_0 & \kappa_w\,\mu_1 & \kappa_w\,\mu_2 \\ \pi_{w,0} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{w,1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^{10}\!/_{21}\,2.2 & {}^{10}\!/_{21}\,0.2 \\ 0.6222 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2857 & 0 \end{pmatrix}$$

- der vorausberechnete Bevölkerungsbestand $\mathbf{B}_w(t_1) = (B_{w,0}(t_1), B_{w,1}(t_1), B_{w,2}(t_1))^T$ ergibt sich als:

$$\mathbf{B}_w(t_1) = \mathbb{L}^{(w)}\,\mathbf{B}_w(t_0) = \begin{pmatrix} 0 & {}^{10}\!/_{21}\,2.2 & {}^{10}\!/_{21}\,0.2 \\ 0.6222 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2857 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 20 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 75 \\ 62 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Vorausberechnung für die gesamte hypothetische Population im Jahr $t_1 = t_0 + 1$:

- Annahme: keine Wanderungsbewegungen
- es sind $\kappa_w = {}^{10}/_{21}$ und $\kappa_m = {}^{11}/_{21}$, seien $\pi_{m,1} = 0.5$ und $\pi_{m,1} = 0.25$

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \kappa_w\,\mu_0 & \kappa_w\,\mu_1 & \kappa_w\,\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{w,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{w,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_m\,\mu_0 & \kappa_m\,\mu_1 & \kappa_m\,\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{m,0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{m,1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & {}^{10}/_{21}\,2.2 & {}^{10}/_{21}\,0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6222 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2857 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{11}/_{21}\,2.2 & {}^{11}/_{21}\,0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2500 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{B}(t_1) = (B_{w,0}(t_1), B_{w,1}(t_1), B_{w,2}(t_1), B_{m,0}(t_1), B_{m,1}(t_1), B_{m,2}(t_1))^T$ berechnet sich analog als

$$\mathbf{B}(t_1) = \mathbb{L}\,\mathbf{B}(t_0) \approx (75, 62, 20, 83, 55, 8)^T$$

- allgemeiner für beliebiges $t_k = t_0 + k$ mit $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbf{B}(t_k) = \mathbb{L}^k\,\mathbf{B}(t_0)$$

- wird zusätzlich ein Vektor von alters- und geschlechtsspezifischen Wanderungssalden $\eta = (\eta_{w,0}, \eta_{w,1}, \eta_{w,2}, \eta_{m,0}, \eta_{m,1}, \eta_{m,2})^T$, so berechnet sich $\mathbf{B}(t_1)$ als

$$\mathbf{B}(t_1) = \mathbb{L}\,\mathbf{B}(t_0) + \eta$$

5.4.2 12. koordinierte Bevölkerungsvorausberechnung der statistischen Ämter

siehe auch Statistisches Bundesamt, (2009)

- Bevölkerungsentwicklung bis 2060
- basiert auf Kohorten-Komponenten-Modell zur Vorausberechnung
- insgesamt 12 Szenarien aus Annahmen über:
  - Geburtenhäufigkeit: zusammengefasste Geburtenziffer bleibt konstant bei 1.4, wobei das durchschnittliche Gebäralter um 1.6 Jahre ansteigt, sowie 2 weitere Annahmen
  - Lebenserwartung: Anstieg der Lebenserwartung bei Geburt auf 85 und 89.2 Jahre oder auf 87.7 und 91.2 Jahre
  - Wanderungssaldo: langfristig konstant bei $100\,000$ oder bei $200\,000$
- Ergebnisse u.a. als animierte Bevölkerungspyramide veröffentlicht