3 Indikatoren, Quoten und Indizes

3.4 Indexzahlen

Eine Indexzahl ist eine kollektive Kennzahl, die durch Kombination verschiedener Größen gebildet wird.

Hier werden v.a. Preis-, Mengen- und Umsatzindizes behandelt, die sich als (gewichtetes) arithmetisches Mittel von Preis-, Mengen- bzw. Umsatzmesszahlen ergeben.

3.4.1 Preisindizes

Betrachte n Wirtschaftsgüter und für jedes Gut i, $i = 1, \ldots, n$

- die Zeitreihe der Preise $p_0^{(i)}, p_1^{(i)}, \ldots, p_t^{(i)}, \ldots$,
- die Zeitreihe der Verbrauchsmengen $q_0^{(i)}, q_1^{(i)}, \ldots, q_t^{(i)}, \ldots$,
- die Zeitreihe der Umsätze $u_0^{(i)}, u_1^{(i)}, \ldots, u_t^{(i)}, \ldots$ mit $u_t^{(i)} = p_t^{(i)}\, q_t^{(i)}$ und
- die Zeitreihen der Preis-, Mengen- und Umsatzmesszahlen zur Basisperiode 0.

Def. 3.1.

Die Größe $U_{0,t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_t^{(i)}}{u_0^{(i)}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_t^{(i)}\, q_t^{(i)}}{p_0^{(i)}\, q_0^{(i)}}$ heißt <u>Umsatzindex</u>.

Def. 3.2.

i) Mit den obigen Bezeichnungen und $g^{(i)} \geq 0, i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} g^{(i)} = 1$ heißt

$$P_{0,t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_t^{(i)}}{p_0^{(i)}}\, g^{(i)}$$

<u>Preisindex zur Gewichtsfunktion $g^{(1)}, \ldots, g^{(n)}$</u>.

ii) Wählt man als Gewichte

$$g^{(i)} = \frac{p_0^{(i)}\, q_0^{(i)}}{\sum\limits_{l=1}^{n} p_0^{(l)}\, q_0^{(l)}}\ , \quad \text{so heißt der zugehörige Index} \quad {}_L P_{0,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)}\, q_0^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)}\, q_0^{(i)}}$$

Preisindex nach Laspeyres.

iii) Wählt man hingegen

$$g^{(i)} = \frac{p_0^{(i)}\, q_t^{(i)}}{\sum\limits_{l=1}^{n} p_0^{(l)}\, q_t^{(l)}}\ , \quad \text{so heißt der zugehörige Index} \quad {}_P P_{0,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)}\, q_t^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)}\, q_t^{(i)}}$$

Preisindex nach Paasche.

iv) Die Größe $_F P_{0,t} = \sqrt{_L P_{0,t} \; _P P_{0,t}}$ heißt Preisindex nach I. Fisher,

die Größe $_D P_{0,t} = {}^1\!/_2 \left(_L P_{0,t} + _P P_{0,t} \right)$ Preisindex nach Drobisch.

$_L P_{0,t}$ und $_P P_{0,t}$ haben die Form: $\dfrac{\sum_{i=1}^n p_t^{(i)} \, \tilde{q}^{(i)}}{\sum_{i=1}^n p_0^{(i)} \, \tilde{q}^{(i)}}$, wobei $\tilde{q}^{(i)}$ gegeben ist durch:

- Preisindex nach Laspeyres: $\tilde{q}^{(i)} = q_0^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$ (Warenkorb der Basisperiode)
- Preisindex nach Paasche: $\tilde{q}^{(i)} = q_t^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$ (Warenkorb der Berichtsperiode)
- Für $\tilde{q}^{(i)} = {}^1\!/_{(t+1)} \sum_{\tau=0}^t q_\tau^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$, erhält man den Preisindex nach Löwe.
- Wählt man $\tilde{q}^{(i)} = {}^1\!/_2 \left(q_0^{(i)} + q_t^{(i)} \right)$ bzw. $\tilde{q}^{(i)} = q_0^{(i)} + q_t^{(i)}$, führt dies auf

  den Preisindex nach Marshall-Edgeworth.
- Der Fall $\tilde{q}^{(i)} \equiv 1$ wird als Preisindex nach Dutot bezeichnet.

3.4.2 Der Verbraucherpreisindex

Preisindizes des Statistischen Bundesamtes in Deutschland:

- (Harmonisierter) Verbraucherpreisindex ((H)VPI)
- Index der Einzelhandelspreise
- verschiedene Indizes für Erzeugerpreise
- Index der Großhandelsverkaufspreise
- Indizes für Außenhandelspreise

Der VPI (siehe auch Statistisches Bundesamt):

- gesamtwirtschaftliche Kennzahl
- misst durchschnittliche Preisentwicklung aller Waren und Dienstleistungen, die von privaten Haushalten für Konsumzwecke gekauft werden
- zentraler Indikator der Geldwertentwicklung in Deutschland:
  - Grundlage für Lohnverhandlungen und Wertsicherungsklauseln
  - Deflationierung in der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung (VGR)
- Berechnung der Inflationsrate:

$$I(t) = \frac{\mathsf{VPI}(t) - \mathsf{VPI}(t-1)}{\mathsf{VPI}(t-1)}$$

Berechnung des VPI (Laspeyres-Index):

- monatlich werden über $300\,000$ Einzelpreise von Waren und Dienstleistungen eines bestimmten Warenkorbes erhoben
- Güter des Warenkorbes werden in ca. 700 Güterarten eingeteilt
- für jede Gütergruppe i wird eine durchschnittliche Preismesszahl $\frac{p_t^{(i)}}{p_0^{(i)}}$ bestimmt
- als Gewichte $g^{(i)}$ werden die Ausgabenanteile der Güterarten an den Haushaltsausgaben in der Basisperiode verwendet (sog. Wägungsschema)

Anpassungen der Berechnungsgrundlage:

- Warenkorb wird ständig angepasst
- Wägungsschema wird alle 5 Jahre aktualisiert

3.4.3 Hedonische Methoden in der Preismessung

- Ziel des VPI: Messung der *reinen* Preisentwicklung
- Grund für die Preisveränderung eines Gutes kann die Veränderung der Qualität sein
- qualitätsbezogene Preisveränderungen sollen aus VPI herausgerechnet werden
- es gibt verschiedene Methoden der Qualitätsbereinigung
- hedonische Methoden sind Verfahren der Qualitätsbereinigung, die auf der linearen Regression beruhen:
  - Zeitvariablenmethode
  - Imputationsmethode

- Grundidee der hedonischen Methoden: man kann ein Gut in einzelne Qualitätsmerkmale zerlegen, die den Verkaufspreis bestimmen

- Quantifizierung des Zusammenhangs zwischen Qualitätsmerkmalen und Verkaufspreis mittels linearer Regression

- Verfahren eignen sich besonders für technische Güter, die einem schnellem Wandel unterliegen

- Einsatz hedonischer Methoden bei der Preisindexberechnung des Statistischen Bundesamts z.B. für PCs oder Gebrauchtwagen

Imputationsmethode:

Mit linearer Regression wird ein allgemeiner Zusammenhang zwischen Preis und Qualitätsmerkmalen in einer Periode ($t = s$) geschätzt, auf dessen Basis die qualitätsbedingte Preisänderung von Gütern gegenüber einer anderen Periode ($t = 0$) berechnet wird, die dann von der nominalen Preisänderung abgezogen wird.

Zeitvariablenmethode:

- Daten (Qualitätsmerkmale $x_1, \ldots, x_d$ und Preise) aus 2 verschiedenen Zeiträumen

- Dummy-Variable für den Zeitraum:

$$D_t = \begin{cases} 0, & \text{Basisperiode } t = 0 \\ 1, & \text{Berichtsperiode } t = s \end{cases}$$

- Regressionsanalyse: $\log(p) = \beta_0 + \sum_{j=1}^{d} \beta_j \, x_j + \gamma \, D_t + \varepsilon$

- prozentuale qualitätsbereinigte Preisänderung zwischen $t = 0$ und $t = s$:

$$\frac{\hat{p}_{s,\boldsymbol{x}} - \hat{p}_{0,\boldsymbol{x}}}{\hat{p}_{0,\boldsymbol{x}}} = [\exp(\hat{\gamma}) - 1] \qquad \forall \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$$

3.4.4 Indexverknüpfungen

Umbasierung einer Indexreihe:

Gegeben sei eine Indexreihe zur Basisperiode 0, z.B. $P_{0,0}, P_{0,1}, \ldots, P_{0,t}, \ldots,$

dann ist die Indexreihe zur Periode k gegeben durch: $P_{k,t} = \dfrac{P_{0,t}}{P_{0,k}} \quad \forall t.$

Verkettung von Indexreihen:

Gegeben seien 2 Indexreihen, z.B. VPIs mit je verschiedenem Wägungsschema, das in $t = \tau$ geändert wurde: $P_{0,0}, P_{0,1}, \ldots, P_{0,\tau+1}$ und $P'_{\tau,\tau}, P'_{\tau,\tau+1}, \ldots.$

- Vorwärtsverkettung: $\tilde{P}_{0,t} = \begin{cases} P_{0,t} & , t \leq \tau \\ P_{0,\tau}\, P'_{\tau,t} & , t > \tau \end{cases}$

- Rückwärtsverkettung: $\tilde{P}_{\tau,t} = \begin{cases} P_{0,t}/P_{0,\tau} & , t \leq \tau \\ P'_{\tau,t} & , t > \tau \end{cases}$

Def. 3.3.

i) Seien $q_0^{(i)}, q_1^{(i)}, \ldots, q_t^{(i)}, \ldots,\ i = 1, \ldots, n$ die Zeitreihen der Verbrauchsmengen von n Gütern und $g^{(i)} \geq 0, i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} g^{(i)} = 1$, dann heißt

$$Q_{0,t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_t^{(i)}}{q_0^{(i)}} g^{(i)}$$

<u>Mengenindex zur Gewichtsfunktion $g^{(1)}, \ldots, g^{(n)}$</u>.

ii) Insbesondere ist der <u>Mengenindex nach Laspeyres</u> gegeben als:

$${}_LQ_{0,t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_t^{(i)}}{q_0^{(i)}} \frac{p_0^{(i)}\, q_0^{(i)}}{\sum_{l=1}^{n} p_0^{(l)}\, q_0^{(l)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_t^{(i)}\, p_0^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)}\, q_0^{(i)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)}\, q_t^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)}\, q_0^{(i)}},$$

iii) und der Mengenindex nach Paasche als:

$$ {}_P Q_{0,t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_t^{(i)}}{q_0^{(i)}} \, \frac{p_t^{(i)} \, q_0^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} \, q_0^{(i)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} \, q_t^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} \, q_0^{(i)}}. $$

- Beachte: Es gilt zwar

  „Umsatz $=$ Preis $\cdot$ Menge“,

  aber für Indizes gleichen Typs

  „Umsatzindex $\neq$ Preisindex $\cdot$ Mengenindex“.

- Vielmehr müssen sich die Indextypen „überkreuzen“, z.B.:

$$ U_{0,t} = {}_L P_{0,t} \; {}_P Q_{0,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} \, q_0^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)} \, q_0^{(i)}} \, \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} \, q_t^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} \, q_0^{(i)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} \, q_t^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)} \, q_0^{(i)}}. $$

- Der Preisindex nach Paasche kann zum Deflationieren von aktuellen Umsatzgrößen $\sum_{i=1}^{n} u_t^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)}\, q_t^{(i)}$ verwendet werden, denn

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} u_t^{(i)}}{{}_P P_{0,t}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} q_t^{(i)}}{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)}\, q_t^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)}\, q_t^{(i)}}} = \sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)}\, q_t^{(i)},$$

z.B. sog. BIP-Deflator.

3.5 Wirtschaftsindikatoren

Beispiele für Wirtschaftsindikatoren (siehe Kap. 3.1.1):

- Konjunkturindikatoren: ifo-Geschäftsklima-Index, Brutto-Inlands-Produkt (BIP)
- Indikatoren für die Preisstabilität: Verbraucher-Preis-Index
- Beschäftigungsindikatoren: Arbeitslosenquote, Anspannungsindex

Anforderungen an einen Wirtschaftsindikator:

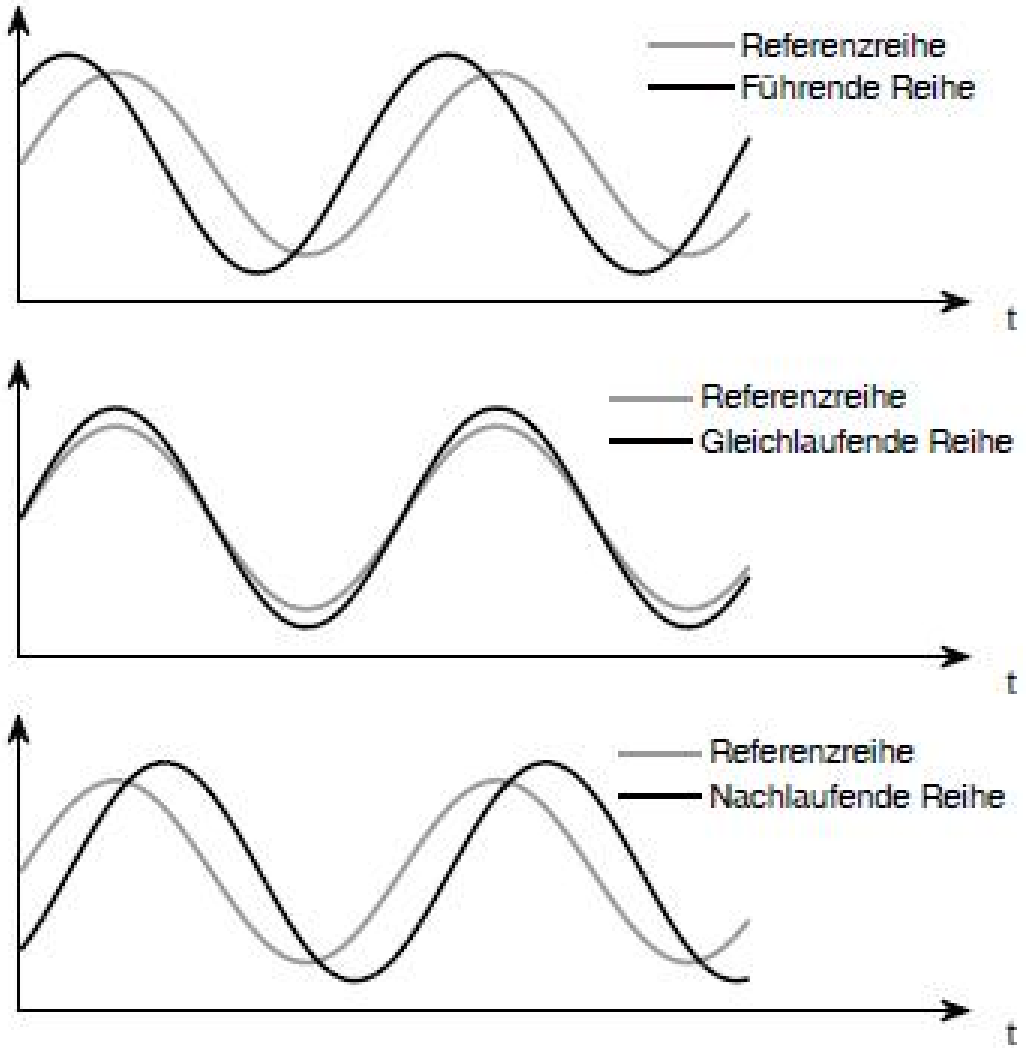
- Plausibilität: theoretischer Zusammenhang zwischen Indikator und latenter Größe
- statistisch-datentechnische Anforderung: Indikatorreihe soll keine Strukturbrüche aufweisen und verlässlich erhoben worden sein
- Konformität: die Indikatorreihe spiegelt den Verlauf in der Vergangenheit gut wider
- Datenaktualität: Indikator ist schnell verfügbar, insbesondere für Prognose wichtig

3.5.1 Kreuzkorrelationen

Nach der zeitlichen Beziehung zwischen Indikator und Referenzgröße unterscheidet man:

- vorlaufende Indikatoren
- gleichlaufende Indikatoren
- nachlaufende Indikatoren

Graphik aus Winker (2010) S. 68:



Bestimmung der zeitlichen Beziehung zwischen Indikator X und Referenzgröße Y:

- betrachte historische Daten $x_1, \ldots, x_T$ und $y_1, \ldots, y_T$ zu T Zeitpunkten
- schätze die Kreuzkorrelation der beiden Zeitreihen $\hat{\rho}_{X,Y}(l)$ für jede Zeitverschiebung $l \in \mathcal{L} := \{-(T-1), \ldots, (T-1)\}$:

$$\hat{\rho}_{X,Y}(l) := \frac{\widehat{\mathsf{Cov}}_{X,Y}(l)}{\hat{\sigma}_X \, \hat{\sigma}_Y} \text{ mit } \widehat{\mathsf{Cov}}_{X,Y}(l) := \begin{cases} \dfrac{1}{T-|l|} \displaystyle\sum_{t=|l|+1}^{T} (y_t - \overline{y})\,(x_{t+l} - \overline{x}), & l \leq 0 \\ \dfrac{1}{T-l} \displaystyle\sum_{t=1}^{T-l} (y_t - \overline{y})\,(x_{t+l} - \overline{x}), & l > 0 \end{cases}$$

$$\hat{\sigma}_X := \sqrt{\widehat{\mathsf{Cov}}_{X,X}(0)} = \sqrt{{}^{1}\!/_{T} \textstyle\sum_{t=1}^{T} (x_t - \overline{x})^2} \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}_Y := \sqrt{\widehat{\mathsf{Cov}}_{Y,Y}(0)}$$

- bestimme die Zeitverschiebung l^* mit der stärksten Kreuzkorrelation:

$$l^* := \arg\max_{l \in \mathcal{L}} |\hat{\rho}_{X,Y}(l)|$$

- z.B. $l = -2 \leq 0$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathsf{Cov}}_{X,Y}(l) &= \frac{1}{T-|l|} \sum_{t=|l|+1}^{T} (y_t - \overline{y})\,(x_{t+l} - \overline{x}) \\
\widehat{\mathsf{Cov}}_{X,Y}(-2) &= \frac{1}{T-2} \sum_{t=3}^{T} (y_t - \overline{y})\,(x_{t-2} - \overline{x}) \\
&= \frac{1}{T-2} \left[\, (y_3 - \overline{y})\,(x_1 - \overline{x}) + \ldots + (y_T - \overline{y})\,(x_{T-2} - \overline{x}) \,\right]
\end{aligned}$$

- z.B. $l = 4$:

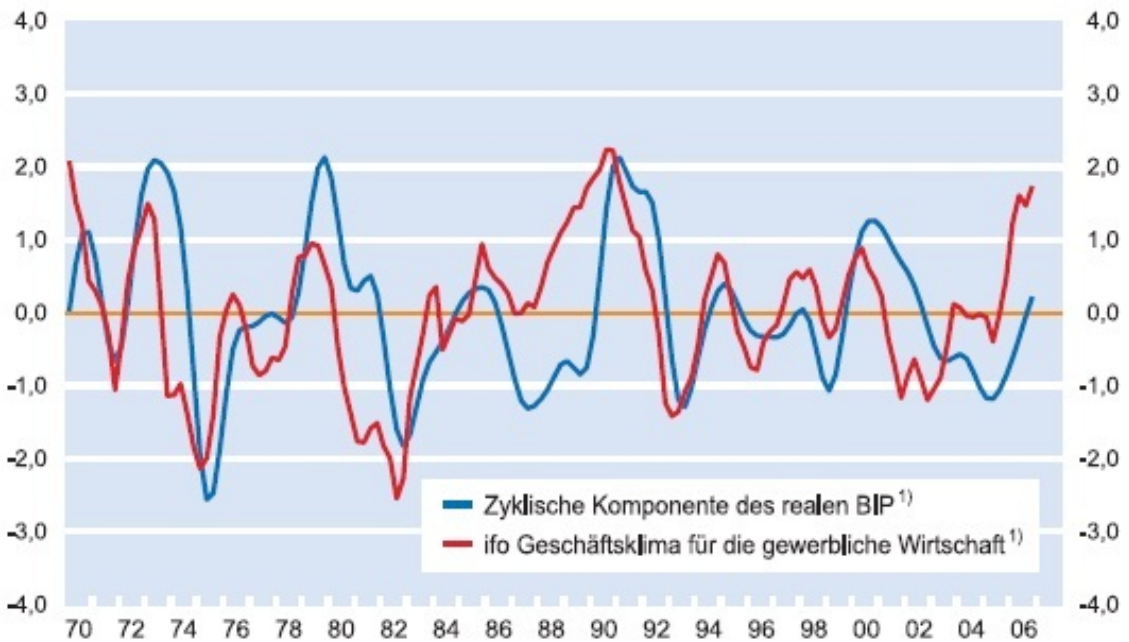
$$\begin{aligned}
\widehat{\mathsf{Cov}}_{X,Y}(4) &= \frac{1}{T-4} \sum_{t=1}^{T-4} (y_t - \overline{y})\,(x_{t+4} - \overline{x}) \\
&= \frac{1}{T-4} \left[\, (y_1 - \overline{y})\,(x_5 - \overline{x}) + \ldots + (y_{T-4} - \overline{y})\,(x_T - \overline{x}) \,\right]
\end{aligned}$$

3.5.2 Der ifo-Geschäftsklima-Index als Konjunkturindikator

Konjunktur bezeichnet die zyklischen Schwankungen der wirtschaftlichen Aktivität in einer Volkswirtschaft.

Die gesamtwirtschaftliche Entwicklung kann anhand des realen BIP gemessen werden, die zyklische Komponente des BIP beschreibt die Konjunkturzyklen.

Es gibt weitere Konjunkturindikatoren, die schneller verfügbar sind, z.B. der ifo-Geschäftsklima-Index. Graphik aus Abberger, K. & Nierhaus, W. (2007):



Berechnung des ifo-Geschäftsklima-Index (GKI):

- 2 Fragen aus dem ifo-Konjunkturtest (monatliche Unternehmensbefragung, im Durchschnitt Meldungen von ca. $7\,000$ Unternehmen):
  - Beurteilung der aktuellen Geschäftslage (GL: „gut“, „befriedigend“, „schlecht“)
  - Geschäftserwartungen für die nächsten sechs Monate (GE: „eher günstiger“, „etwa gleich bleibend“, „eher ungünstiger“)
- Saldierung: Schätzung der mittleren GL- und GE-Einschätzungen

$$Saldo_{GL} = \%GL_{\text{gut}} - \%GL_{\text{schlecht}}$$

$$Saldo_{GE} = \%GE_{\text{eher günstiger}} - \%GE_{\text{eher ungünstiger}}$$

- Gesamt-Saldo: $Saldo_{GKI} = \sqrt{(Saldo_{GL} + 200)(Saldo_{GE} + 200)} - 200$
- Index-Messzahl zur Basis 2005:

$$GKI = \frac{Saldo_{GKI} \text{ im Berichtsmonat} + 200}{\text{durchschnittlicher } Saldo_{GKI} \text{ in 2005} + 200} 100$$

Details Saldierung für $Saldo_{GL}$ ($Saldo_{GE}$ analog):

- $Saldo_{GL}$ ist Schätzung der mittleren Geschäftslage-Einschätzung der Unternehmen
- Annahmen:
  - den Beobachtungen GL_i liegt latente metrische Zufallsgröße g_i zugrunde
  - g_i ist auf $[g_u, g_o]$ stetig gleichverteilt (i.i.d. für alle Unternehmen)
  - es gibt Schwellen $g_u < t_u < 0$ und $0 < t_o < g_o$ mit $t_u = -t_o$, so dass

$$GL_i = \text{„schlecht“} \Leftrightarrow g_i < t_u \qquad \text{und} \qquad GL_i = \text{„gut“} \Leftrightarrow g_i > t_o$$

- $Saldo_{GL}$ ist proportional zum Erwartungswert $\overline{g} = \frac{g_o + g_u}{2}$ der latenten Variable

$$\%GL_{\text{gut}} - \%GL_{\text{schlecht}} = \frac{g_o - t_o}{g_o - g_u} - \frac{t_u - g_u}{g_o - g_u} = \frac{g_o + g_u}{g_o - g_u} = \overline{g}\,\frac{2}{g_o - g_u}$$

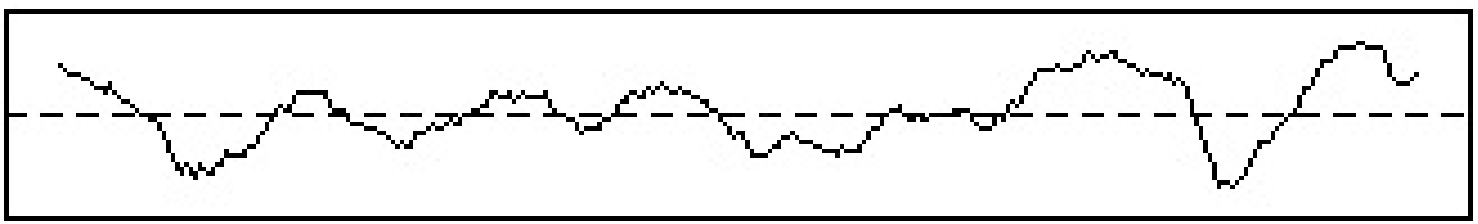
3.6 Analyse von Zeitreihen

Das additive Komponentenmodell:

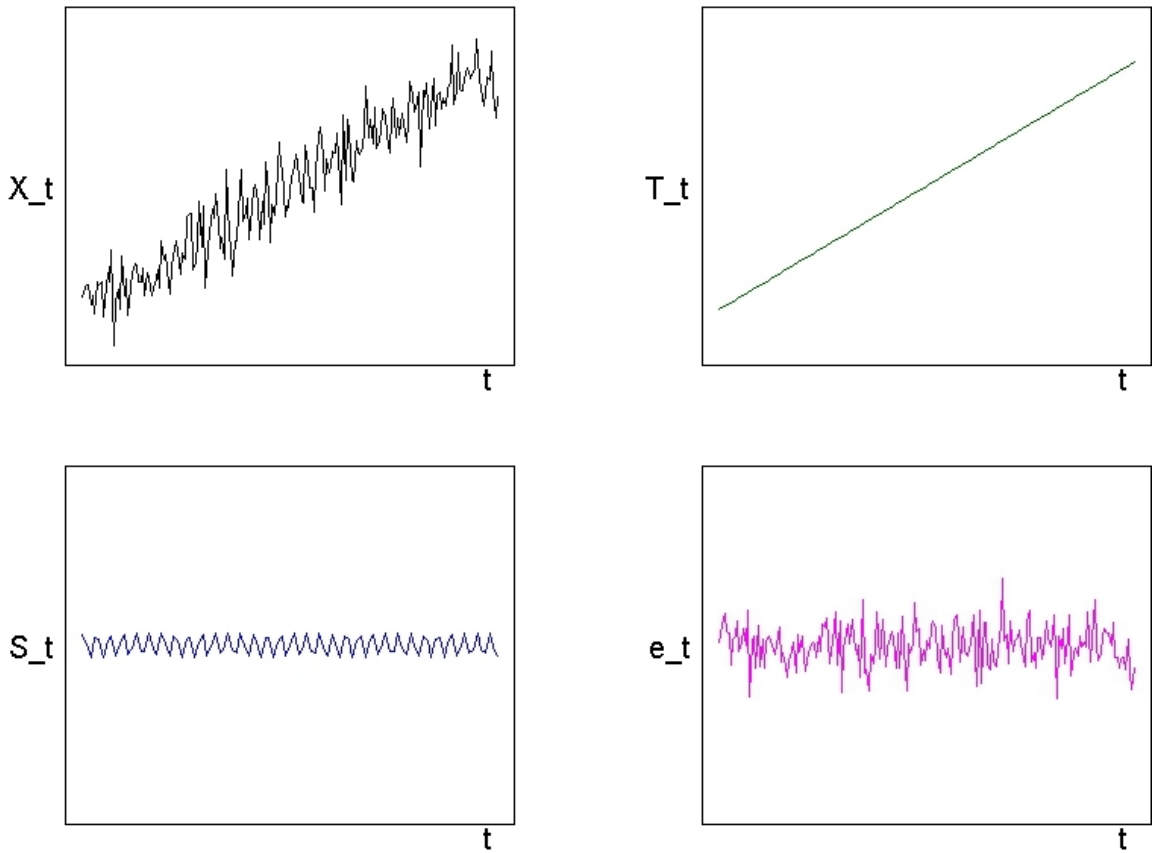
$$X_t = T_t + Z_t + S_t + \epsilon_t$$

- T_t: langfristige Tendenz, Trend
- Z_t: zyklische Schwankungen, Konjunktur
- S_t: saisonale Komponente
- ϵ_t: irreguläre Komponente, zufällige Abweichungen

Beispiel: ifo-Geschäftsklima-Index 01/1991-01/2012:



Komponenten einer Zeitreihe mit linearem Trend, leichten saisonalen Schwankungen und stärker streuenden, zufälligen Abweichungen:

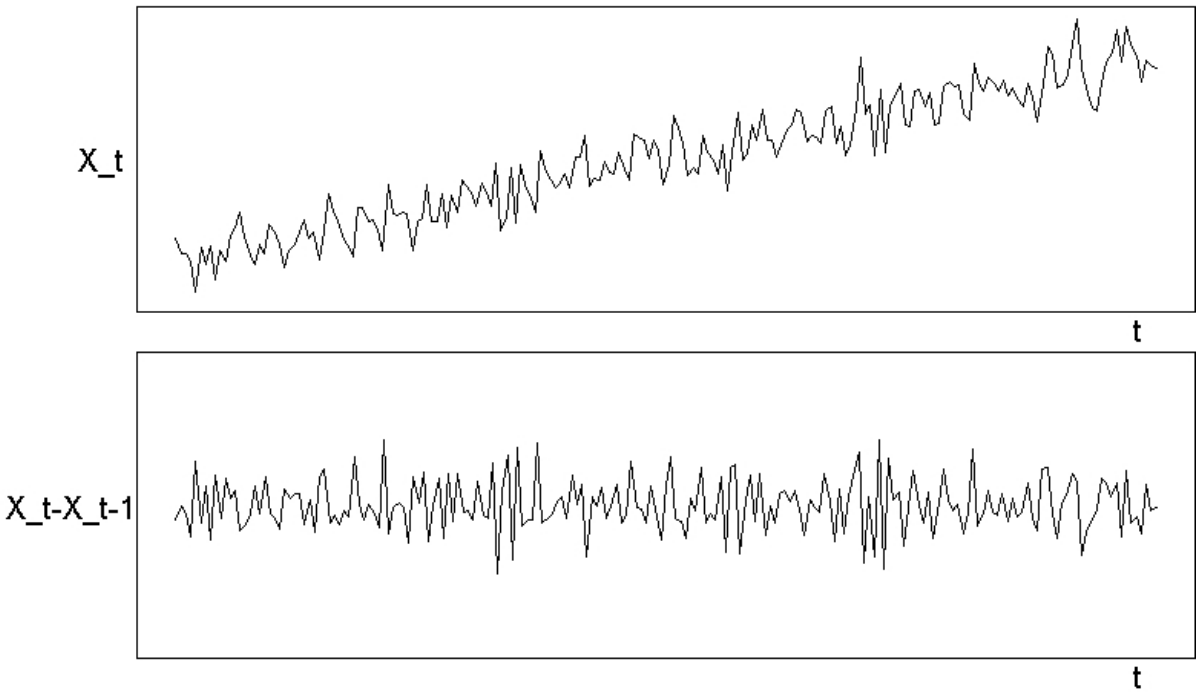


Trendbereinigung:

- Bereinigung eines linearen Trends $T_t = \beta_0 + \beta_1 t$ mit Differenzenbildung 1. Ordnung:

$$\tilde{X}_t := X_t - X_{t-1} = \underbrace{T_t - T_{t-1}}_{=\beta_1} + Z_t - Z_{t-1} + S_t - S_{t-1} + \epsilon_t - \epsilon_{t-1}$$

- Alternative: explizite Schätzung des Trends mit geeignetem Verfahren



Saisonbereinigung:

- Saisonbereinigung $\Leftrightarrow$ Extraktion der glatten Komponente $T_t + Z_t$
- Verfahren der gleitenden Durchschnitte über m Zeitpunkte:
  - für $m = 2\,k$ gerade:
  $$\overline{X}_t := \frac{1}{2\,k}\left(\frac{1}{2}\,X_{t-k} + X_{t-k+1} + \ldots + X_{t+k-1} + \frac{1}{2}\,X_{t+k}\right)$$
  - $m = 2\,k + 1$ ungerade:
  $$\overline{X}_t := \frac{1}{2\,k+1}\,(X_{t-k} + \ldots + X_{t+k})$$
- Saison-Komponente „verschwindet“, z.B. für $m = 2\,k + 1$ ungerade:
$$\overline{S}_t := \frac{1}{2\,k+1}\,(S_{t-k} + \ldots + S_{t+k}) = \mathsf{c} \quad \forall t$$
- bei Quartalsdaten ist $m = 4$, bei Monatsdaten ist $m = 12$

Simultane Schätzung der Komponenten bei einer Zeitreihe mit linearem oder polynomialem Trend und Saison-Komponente:

- einfache lineare Regression
- Trend: Modellierung als Polynom (vom Grad d) in Abhängigkeit der Zeitvariable t
- Saison: Modellierung mithilfe von $m-1$ Dummy-Variablen für die kategoriale Variable Saison mit m Ausprägungen
- Modellgleichung:

$$X_t = \beta_0 + \sum_{j=1}^{d} \beta_j \, t^j + \sum_{s=1}^{m-1} \beta_{d+s} \, D_s + \epsilon_t$$

- Schätzung mit KQ-Schätzer

Ausblick: Zeitreihenanalyse ist weit mehr als das hier Vorgestellte. Bei weitergehendem Interesse kann die Vorlesung Zeitreihenanalyse bei Prof. Mittnik (immer im SoSe, erst ab 5. Semester zu empfehlen) besucht werden.