Lösungsnotizen zum 10. Übungsblatt:

Aufgabe 4

a)

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \lambda\exp(-\lambda x) I_{[0,\infty)}(x) \\
M(s) &= \mathbb{E}(exp(sX)) = \int\limits_0^\infty \exp(sx)\cdot\lambda exp(-\lambda x)\ dx \\
&= \int\limits_0^\infty \lambda\exp((s-\lambda)x)\ dx \\
&= \lambda\left[\frac{exp((s-\lambda)x)}{s-\lambda}\right]_0^\infty \\
&= \frac{\lambda}{\lambda-s} \quad \text{falls } s<\lambda, \quad \text{ansonsten nicht definiert}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
M'(s) &= \frac{\lambda}{(\lambda-s)^2} \\
M''(s) &= \frac{2\lambda}{(\lambda-s)^3} \\
M'''(s) &= \frac{3\cdot 2\cdot\lambda}{(\lambda-s)^4} \\
M^{(k)}(s) &= \frac{k!\cdot\lambda}{(\lambda-s)^{k+1}}
\end{aligned}
$$

k-tes Moment $= M^{(k)}(0) = \frac{k!\cdot\lambda}{\lambda^{k+1}} = \frac{k!}{\lambda^k}$.

Aufgabe 5

$g = F, g$ ist bijektiv, $h = F^{-1}$.

$h'(y) = \frac{\partial}{\partial y}F^{-1}(y) = \underbrace{\frac{1}{F'(F^{-1}(y))}}_{\text{Ableitung der Umkehrfunktion}} = \frac{1}{f(F^{-1}(y))}$ $\quad (\geq 0$ für $f(F^{-1}(y)) \neq 0)$

$f_Y(y) = f_X(h(y))\cdot|h'(y)| = f(F^{-1}(y))\cdot\frac{1}{f(F^{-1}(y))} = \begin{cases} 1 & \text{falls } y\in(0,1) \text{ und } f(F^{-1}(y))\neq 0 \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$