Aufgabe 1

Sei X eine Zufallsvariable und folge einer Weibull-Verteilung mit Parametern $\alpha > 0$ und $\beta > 0$, d.h. mit Dichte

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha\beta x^{\beta-1} \exp(-\alpha x^{\beta}), \quad x \geq 0.$$

Welcher Verteilung folgt $Y = X^{\beta}$? Bestimmen Sie hierzu die Dichte von Y und suchen Sie diese im Vorlesungsskript.

Aufgabe 2

Bei der Lufthansa ist aus Erfahrung bekannt, dass etwa 18% der Fluggäste ihre gebuchte Reise nicht antreten. Um die Auslastung der Flugzeuge möglichst hoch zu halten, werden mehr als die verfügbaren 150 Plätze in einem Airbus A320 verkauft.

1. Berechnen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Passagier nicht mitgenommen werden kann, wenn 170 Plätze verkauft werden.
2. Wieviele Plätze sollte die Lufthansa maximal verkaufen, wenn die Wahrscheinlichkeit für ein solches Missgeschick kleiner 0.01 sein soll?

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Entscheidungen über das Antreten der Reise zwischen den einzelnen Passagieren unabhängig sind. Desweiteren in R: $\Phi(x)$ = `pnorm(x)` und $\Phi^{-1}(x)$ = `qnorm(x)`.

Aufgabe 3

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig identisch verteilt mit $X_i \sim \chi^2_2$ (χ^2-Verteilung mit zwei Freiheitsgraden). Zeigen Sie, daß

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{X_i}{2}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ stu mit $X_i \sim U(0,1)$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, daß

$$\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} c$$

und bestimmen Sie die Konstante c.

Aufgabe 5

Sei Y eine $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable und X_i, $i = 1, \ldots, n$, $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen.
Zeigen Sie, dass

$$\frac{Y}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Aufgabe 6

Seien $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. mit $X_i \sim LogN(\mu, \sigma^2), \quad \sigma^2 < \infty$.

Zeigen Sie zunächst, dass $\log(X_i) \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Zeigen Sie dann, dass

$$\sqrt{n} \left(\left(\prod_{i=1}^{n} X_i \right)^{\frac{1}{n}} - \exp(\mu) \right) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 \exp(\mu)^2).$$

Hinweis:
Die Dichte von X_i, $i = 1, \ldots, n$, lautet

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{x_i\, \sigma \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\log(x_i) - \mu)^2}{\sigma^2} \right) \cdot I_{(0,\infty)}(x_i).$$