Aufgabe 1

Die zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) sei stetig verteilt mit Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + cy, & 0 < x < 1,\, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $c = \frac{4}{3}$.

(b) Bestimmen Sie die Randdichten f_X und f_Y.

(c) Überprüfen Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind.

(d) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X)$.

(e) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(\exp(Y))$.

(f) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X \leq Y)$.

Aufgabe 2

Sei $X \sim U(0,1)$ und $Y \sim U(0,1)$ stu. Berechnen Sie die Kovarianzmatrix $\mathbb{V}((X+Y, X-Y))$.

Aufgabe 3

a) Sei $X \sim P(\lambda_1)$ und $Y \sim P(\lambda_2)$ stu. Welcher Verteilung folgt $Z = X + Y$?

Hinweise:

- Verwenden Sie hierzu die Faltungsformel.
- Der binomische Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

könnte hilfreich sein.

b) Folgern Sie anhand des Ergebnisses aus a), welcher Verteilung die Zufallsvariable $X^* = \sum_{i=1}^{n} X_i$ mit $X_i \sim P(\lambda)$ stu, $i = 1, \ldots, n$, folgt.

c) Seien $X_1, \ldots, X_n$ poissonverteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim P(\lambda)$ stu, $i = 1, \ldots, n$. Berechnen Sie den Erwartungswert von

$$T = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}.$$

Hinweis:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Aufgabe 4

Sei $X = (X_1, X_2) \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$ mit $\mathbf{0} = (0, 0)$ und

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \quad \rho \in (-1, 1).$$

Bestimmen Sie eine Matrix A so, dass $AX = (X_1 + X_2, X_1 - X_2)$. Bestimmen Sie unter Verwendung von Satz 7.17 die bivariate Verteilung von $(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$. Wie lauten die marginalen Verteilungen von $X_1 + X_2$ und $X_1 - X_2$?

Aufgabe 5

Eine Fertigungslinie stellt Fußbälle her, deren Durchmesser im Mittel normgerecht sind, aber eine Standardabweichung von 0.4cm aufweisen. Bälle, die mehr als 0.5cm von der Norm abweichen, gelten als Ausschuss. Wie groß ist der Ausschussanteil höchstens?