Aufgabe 1

Sei $X \sim U[0, \pi]$. Berechnen Sie die Dichte der Größe

$$Y \quad = \quad \sin(X).$$

Aufgabe 2

Auf dem Einheitskreis im 1. Quadranten des Koordinatensystems

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

sollen Zufallszahlen erzeugt werden. Dabei werde so vorgegangen, dass zunächst die x-Koordinate des Punktes $p = (x, y)$ aus einer Gleichverteilung auf $[0, 1]$ gezogen wird und anschließend die y Koordinate, auch aus einer Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, \sqrt{1 - x^2}]$.
Betrachten Sie nun die Abstände r der so entstehenden Punkte zum Koordinatenursprung und berechnen Sie die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen

$$Z := \begin{pmatrix} x \\ r \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Dichtetransformationssatzes.

Aufgabe 3

Seien X und Y stochastisch unabhängig und standardnormalverteilt. Zeigen Sie mit Hilfe des multivariaten Transformationssatzes für Dichten, dass die Summe

$$Z := X^2 + Y^2$$

exponentialverteilt ist mit Parameter $\lambda = \frac{1}{2}$.

Hinweise: Nutzen Sie die Transformation $g(X, Y) = (X^2 + Y^2, Y)$. Achten Sie beim Integrieren genau auf die Integrationsgrenzen. Weiterhin können Sie
$\int \frac{1}{\sqrt{u - v^2}} dv = \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{u - v^2}}\right)$ verwenden.

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion einer exponentialverteilten Zufallsvariable.

b) Berechne Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus $a)$ das k-te Moment einer exponentialverteilten Zufallsvariable.

Aufgabe 5

Sei X eine Zufallsvariable mit bijektiver, stetig differenzierbarer Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow (0, 1)$. Berechnen Sie unter Zuhilfenahme des Dichtetransformationssatzes die Verteilung der Zufallsvariablen $Y := F(X)$.