Aufgabe 1

Gegeben sei eine i.i.d. Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ von Zufallsvariablen, die auf dem Intervall $[0, 2\theta]$ gleichverteilt seien.

a) Berechnen Sie die Varianz des für den Parameter $\theta = \mathbb{E}(X_i)$ erwartungstreuen Schätzers
$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

b) Für ein festes i berechne man die Varianz des ebenfalls erwartungstreuen Schätzers
$$Y := X_i.$$

c) Wenn der Index i aus b) datenabhängig gewählt wird, ist der Schätzer
$$\tilde{Y} := X_{i((X_1,\ldots,X_n))}$$
im Allgemeinen nicht mehr erwartungstreu. Für welche Wahl von i in Abhängigkeit der Daten ist die größte Verzerrung des Schätzers nach oben zu erwarten?

d) Berechnen Sie den Bias für den am meisten nach oben verzerrten Schätzer aus c).

e) Berechnen Sie für $n = 3$ den Erwartungswert und die Varianz des Schätzers
$$Z := \text{median}((X_1, X_2, X_3)).$$
Berechnen Sie dazu zunächst die Verteilungsfunktion des Schätzers.

Aufgabe 2

Gegeben sei die auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable X. Bestimmen Sie mit Hilfe des Dichtetransformationssatzes die Dichte der Zufallsvariablen
$$Y := -\ln\left(\frac{1}{X} - 1\right).$$

Aufgabe 3

Betrachten Sie den zweimaligen Würfelwurf.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, die Augensumme 10 zu erhalten.

b) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Wurf eine 3 war unter der Bedingung, dass die Augensumme 11 ist.