Aufgabe 1

Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Exponentialverteilung:

$$X \sim Exp(\lambda),\ f_X(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x), \qquad (\lambda > 0)$$

Aufgabe 2

Sei F eine injektive Verteilungsfunktion und X gleichverteilt auf dem Intervall $[0,1]$. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen

$$Y := F^{-1}(X).$$

Aufgabe 3

Gegeben Sei eine auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable X.

a) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $Y := \cot(\pi \cdot X)$ die Gestalt $F_Y(c) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(c)}{\pi}$ besitzt.

b) Berechnen Sie die Dichte der Zufallsvariablen Y.

c) Wie ist Y verteilt?

d) Besitzt Y einen Erwartungswert?

Hinweise: Beachten Sie, dass die Arkuskotangensfunktion streng monoton fallend ist. Weiterhin können Sie die Beziehung $\arctan(x) =$arccot$(-x) - \frac{\pi}{2}$ verwenden.

Aufgabe 4

Gegeben sei eine stetige reellwertige Zufallsvariable X mit Dichte

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

bezüglich des Lebesguesmaßes.

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen.

   Hinweis: Führen Sie bei der nötigen Integration eine Substitution der Form $u = 1 + e^{-x}$ durch.

b) Zeigen Sie, dass die Dichte f symmetrisch um $x = 0$ ist.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X.

d) Bestimmen Sie für die Zufallsvariable X die erwartete absolute Abweichung vom Mittelwert.

   Hinweis: Nutzen Sie die Technik der partiellen Integration. Weiterhin können Sie die Gleichheit $\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \ln(1+e^{-x}) - \ln(e^{-x})$ verwenden.