Aufgabe 1

Es seien die Folgen f_n und g_n wie in Blatt 5, Aufg. 2 bzw. 3:

$$\begin{aligned} &f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ &f_n(x) = x^2 \cdot I_{[-n,n]}(x) + n^2 \cdot I_{(-\infty,-n)\cup(n,\infty)}(x), \quad n \in \mathbb{N}. \\ &g_n(x) = I_{[-n,n]}(x) + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot I_{(-\infty,-n)\cup(n,\infty)}(x), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wir betrachten das Maß ν, welches das Maß mit der Dichte der Standardnormalverteilung h bzgl. des Lebesguemaßes λ ist:

$$\nu = h \odot \lambda, \quad \text{wobei}$$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right).$

Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\nu$ und $\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\nu$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Funktion $F(x) = \begin{cases} e^{2x} & x < -1 \\ 1/2(1 + x/e) & -1 \leq x < 1 \\ 1 - e^{-2x} & x \geq 1 \end{cases}$

1. Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.
2. Sei $\nu = \lambda_F$ das zu F gehörenden Lebesgue-Stieltjes Maß. Bestimmen Sie eine Dichte f und ein Maß μ derart, dass $\nu = f \odot \mu$ (vergleiche Satz von Radon Nikodym).
3. Sei X eine Zufallsvariable mit Bildmaß ν, also $X \sim \nu$, oder gleichbedeutend $P(X \leq x) = F(x)$. Berechnen Sie $E(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass es keine Gleichverteilung auf den natürlichen Zahlen geben kann. (Es sei stillschweigend vorausgesetzt, dass die unterliegende σ-Algebra alle einelementigen Mengen enthält.) Gibt es bei geeigneter Wahl einer σ-Algebra eine Gleichverteilung auf den reellen Zahlen?

Aufgabe 4

Gegeben sei eine stetige reellwertige Zufallsvariable X mit Dichte

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

bezüglich des Lebesguesmaßes.

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen.

   Hinweis: Führen Sie bei der nötigen Integration eine Substitution der Form $u = 1 + e^{-x}$ durch.

b) Zeigen Sie, dass die Dichte f symmetrisch um $x = 0$ ist.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X.

d) Bestimmen Sie für die Zufallsvariable X die erwartete absolute Abweichung vom Mittelwert.

   Hinweis: Nutzen Sie die Technik der partiellen Integration. Weiterhin können Sie die Gleichheit $\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \ln(1 + e^{-x}) - \ln(e^{-x})$ verwenden.