Aufgabe 1

Sei Ω eine überabzählbare Menge und $\mathcal{A}$ die σ-Algebra aller abzählbar/coabzählbaren Mengen (d.h. $\mathcal{A} = \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ abzählbar oder } \bar{A} \text{ abzählbar}\}$, vgl. auch Blatt 2 Aufgabe 5). Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1] : A \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein (wohldefiniertes) Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Aufgabe 2

Sei λ wieder das Lebesgue-Maß und $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_n(x) := (n+1)x^n I_{[0,1)}(x)$ für $n \in \mathbb{N}$.

a) Bestimmen Sie $\int \lim\limits_{n\to\infty} g_n \, d\lambda$.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int g_n \, d\lambda$.

Hinweis: $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)x^n = 0$ für alle $x \in [0,1)$.

Aufgabe 3

Sei λ das Lebesgue-Maß und $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) := \left(\frac{1+\sin x}{2}\right)^n I_{[0,2\pi]}(x)$ für $n \in \mathbb{N}$.

a) Bestimmen Sie $\int \lim\limits_{n\to\infty} f_n \, d\lambda$.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda$.

Aufgabe 4

Es seien die Folgen f_n und g_n wie in Blatt 5, Aufg. 2 bzw. 3:

$$\begin{aligned} & f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ & f_n(x) = x^2 \cdot I_{[-n,n]}(x) + n^2 \cdot I_{(-\infty,-n)\cup(n,\infty)}(x), \quad n \in \mathbb{N}. \\ & g_n(x) = I_{[-n,n]}(x) + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot I_{(-\infty,-n)\cup(n,\infty)}(x), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wir betrachten das Maß ν, welches das Maß mit der Dichte der Standardnormalverteilung h bzgl. des Lebesguemaßes λ ist:

$$\nu = h \odot \lambda, \quad \text{wobei}$$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$.

Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int f_n \, d\nu$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int g_n \, d\nu$.