Aufgabe 1

Sei der Meßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ gegeben sowie die meßbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\omega \mapsto f(\omega) = \omega I_{\mathbb{N}}(\omega)$$

und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\omega \mapsto g(\omega) = \omega^2 I_{[0,1]}(\omega).$$

Berechnen Sie

a)

$$\int_{[0,n]} f d\lambda \text{ und } \int_{[0,n]} f d\mu_Z \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

b)

$$\int g d\lambda \text{ und } \int g d\mu_Z.$$

Aufgabe 2

Es sei

$$\begin{aligned} &f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ &f_n(x) = x^2 \cdot I_{[-n,n]}(x) + n^2 \cdot I_{(-\infty,-n)\cup(n,\infty)}(x), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Entscheiden Sie, ob $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda$ und $\int \lim\limits_{n\to\infty} f_n \, d\lambda$ gleich sind und bestimmen Sie diese Werte.

Aufgabe 3

Es sei

$$\begin{aligned} &g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ &g_n(x) = I_{[-n,n]}(x) + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot I_{(-\infty,-n)\cup(n,\infty)}(x), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Entscheiden Sie, ob $\lim\limits_{n\to\infty} \int g_n \, d\lambda$ und $\int \lim\limits_{n\to\infty} g_n \, d\lambda$ gleich sind und bestimmen Sie diese Werte.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n} dx$$

indem Sie den Satz von der dominierten Konvergenz ausnutzen.

Hinweis: Zeigen Sie dazu mit der Bernoulli-Ungleichung, daß $(1 + nx^2)/(1 + x^2)^n \leq 1$ für alle $x \in [0, 1]$ ist.

Aufgabe 5

Überprüfen Sie, ob auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ durch die folgenden Zuordnungen ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert wird:

a) $P : A \mapsto \sum_{i \in A} t(1-t)^{i-1}$ für $t \in (0,1)$

b) $P : A \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } |A| < \infty \\ 1 & \text{falls } |A| = \infty \end{cases}$

c) $P : A \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } |\bar{A}| = \infty \\ 1 & \text{falls } |A| = \infty \end{cases}$

d) $P : A \mapsto \sum_{i \in A} \frac{1}{i}$