Aufgabe 1

Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{F}_1$ genau dann, wenn A oder $\bar{A}$ abzählbar ist, und μ das Maß

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{falls } A \text{ nicht abzählbar.} \end{cases}$$

Für $\Omega' := \{0, 1\}$ und $\mathcal{F}_2 := \mathcal{P}(\Omega')$ wird die Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ definiert durch

$$f(\omega) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \omega \text{ rational} \\ 1 & \text{falls } \omega \text{ irrational.} \end{cases}$$

Man zeige, dass f $\mathcal{F}_1$-$\mathcal{F}_2$-messbar ist und bestimme das Bildmaß μ_f.

Aufgabe 2

(Fortsetzung von Blatt 3, Aufgabe 1)

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ein Messraum und

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

und

$$\mathcal{A} = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}.$$

Bestimmen Sie das Bildmaß$\lambda_f(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$.

Hinweis: Unterscheiden Sie die drei Fälle:
Fall 1: $A = (a, b]$ mit $a < 0, b < 0$.
Fall 2: $A = (a, b]$ mit $a < 0, b \geq 0$.
Fall 3: $A = (a, b]$ mit $a \geq 0, b \geq 0$.

Aufgabe 3

(a) Sei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{4}x, & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 1, & \text{für } x > 4. \end{cases}$$

Berechnen Sie das Lebesgue-Stieltjes-Maß λ_G für die Mengen

$$C = (1, 2],$$
$$D = (-2, 2].$$

(b) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$F(x) = \begin{cases} -2 & \text{für } x < -2 \\ x & \text{für } -2 \leq x < 0 \\ x+1 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{für } 1 \leq x \end{cases}$$

Sei λ_F das zu F gehörende Lebesgue-Stieltjes-Maß.

(i) Bestimmen Sie $\lambda_F((-\infty, a])$ für beliebige $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\lambda_F(\{0\}) = 1$ und $\lambda_F(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$.

Aufgabe 4

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ der Maßraum mit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E})$ mit $\mathcal{E} = \{\{1\},\{2,3\}\}$ und für μ gelte

$$\mu(\{1\}) = 1, \quad \mu(\{2,3\}) = 2 \quad \text{und} \quad \mu(\Omega) = 7.$$

Überlegen Sie, welche der folgenden Abbildungen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ bezüglich μ integrierbar sind, und geben Sie gegebenenfalls $\int_\Omega f d\mu$ an.

a) $f(\omega) = \omega$

b) $f(\omega) = I_{\{4,5,6\}}(\omega)$

c) $f(\omega) = \max\{\omega, 4\}$

d) $f(\omega) = -7\omega^5 + 125\omega^4 - 835\omega^3 + 2575\omega^2 - 3658\omega + 2040$

Aufgabe 5

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 3 & x \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right] \\ 13 & x \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\} \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Wie groß ist

$$\int f \, d\lambda + \int_{\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}} f \, d\mu_Z?$$

(λ bezeichnet das Lebesguemaß und μ_Z das Zählmaß)