Aufgabe 1

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ein Messraum und

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und

$$\mathcal{A} = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}.$$

Bestimmen Sie das Urbild

$$f^{-1}(A) \; \forall A \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

Hinweis: Unterscheiden Sie die drei Fälle:
Fall 1: $A = (a, b]$ mit $a < 0, b < 0$.
Fall 2: $A = (a, b]$ mit $a < 0, b \geq 0$.
Fall 3: $A = (a, b]$ mit $a \geq 0, b \geq 0$.

Aufgabe 2

Das Mengensystem $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ ist abzählbar oder } \bar{A} \text{ ist abzählbar}\}$ ist eine σ-Algebra über $\mathbb{R}$ (vgl. Übung 2 Aufgabe 5).
Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar sind.

a) $f(x) = x$.
b) $f(x) = \lfloor x \rfloor, \; x \in \mathbb{R}$.
c) $f(x) = I_{\mathbb{Q}}(x), \; x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

Sei

$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, (-\infty, 1], (1, \infty), \mathbb{R}\}, \; \Omega_1 = \mathbb{R}$,
$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, [0, \frac{1}{4}], (\frac{1}{4}, 1], [0, 1]\}, \; \Omega_2 = [0, 1]$, und

$$\begin{aligned} &g : \mathbb{R} \to [0, 1] \\ &g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ist die Abbildung g $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$ messbar?

Aufgabe 4

Untersuchen Sie, ob es sich bei den folgenden Funktionen g um messbare (d.h. $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}$-messbare) Funktionen handelt.

(a) $g(x) = |x|, \; x \in \mathbb{R}$
(b) $g(x) = xI_{\mathbb{Q}}(x), \; x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 5

Sei $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Für welche μ wird dadurch ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ definiert?

i) $\mu(A) = \sum\limits_{i \in A} t(1-t)^{i-1}$ für $t \in (0, 1)$

ii) $\mu(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ ist endlich, d.h. } |A| < \infty \\ 1 & A \text{ ist unendlich, d.h. } |A| = \infty \end{cases}$

Aufgabe 6

Berechnen Sie die Maße μ_Z, $\mu_Z|_{\mathbb{N}}$, λ und $\lambda|_{[0,1]}$ folgender Mengen:

(i) $[1,4]$, (ii) $\{1,4\}$, (iii) $\mathbb{Q}$,

(iv) $A_n := [(-1)^n, 2], n \in \mathbb{N}$

Hinweis: Das reduzierte Lebesguemaß (Spurmaß) $\lambda|_A$ ist definiert als $\lambda|_A(B) = \lambda(A \cap B)$. Das reduzierte Zählmaß $\mu_Z|_A$ ist definiert als $\mu_Z|_A(B) = \mu_Z(A \cap B)$.