Aufgabe 1

Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und

$$A_n = \{x : (-1)^n x > -1\}$$

1. Wie lautet $\bar{A}_n$
2. Berechnen Sie $\limsup A_n$ und $\liminf A_n$

Aufgabe 2

Sei der Ergebnisraum $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ gegeben. Welche der folgenden Mengen sind σ-Algebren über Ω?

i) $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\}$

ii) $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\}$

iii) $\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\}$

iv) $\mathcal{F}_4 = \{\emptyset, \{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{a, b\}, \{d, e\}, \{a, b, d, e\}, \Omega\}$

v) Geben Sie die kleinste und die größte σ-Algebra über Ω an.

Aufgabe 3

Seien $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in I$, wobei $\mathcal{F}$ σ-Algebra über Ω. Zeigen Sie, dass

a) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

b) $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$,

c) $A_i \setminus A_j \in \mathcal{F}$.

Aufgabe 4

Sei $\Omega = \{a, b, c\}$ und $\mathcal{F} = \sigma(\{a\})$ und $\mathcal{G} = \sigma(\{b\})$ σ-Algebren über Ω. Ist $\mathcal{H} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ eine σ-Algebra?

Aufgabe 5

Es sei $\Omega = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} |\ A \text{ ist abzählbar oder } \bar{A} \text{ ist abzählbar}\}$ eine σ-Algebra über Ω ist.

Aufgabe 6

Sei $\Omega_1 = \{1, 2, \ldots, 6\}$ und $\mathcal{F}_1 = \sigma(\mathcal{E})$ die vom Mengensystem $\mathcal{E} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$ auf Ω_1 erzeugte σ-Algebra. Weiterhin sei $\Omega_2 = \{a, b, c\}$ und $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega_2)$ eine σ-Algebra über Ω_2.

Sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ mit

$$\omega \mapsto f(\omega) = \begin{cases} a & \omega \in \{1, 2, 3, 4\} \\ b & \omega \in \{5, 6\} \end{cases}$$

und $g : \Omega_1 \to \Omega_2$ mit

$$\omega \mapsto g(\omega) = \begin{cases} a & \omega \in \{2, 3, 4\} \\ b & \omega \in \{5, 6\} \\ c & \omega \in \{1\} \end{cases}$$

Sind f und g $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$ meßbar?