

Nachklausur

Wahrscheinlichkeitstheorie und Inferenz I

Sommersemester 2012

Marco Cattaneo
Institut für Statistik

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Unterschrift:

Wichtig:

- Überprüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Die Klausur besteht aus fünf Aufgaben und der Standardnormalverteilung im Anhang. Tragen Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer lesbar ein.
- Verwenden Sie für Ihre Lösungen ausschließlich den Klausurbogen (Vorder- und Rückseite), Zusatzblätter werden auf Anfrage ausgeteilt.
- Als Hilfsmittel zugelassen sind das ausgedruckte Skript sowie ein nicht-programmierbarer Taschenrechner. Bücher, alte Klausuren und Übungsaufgaben inkl. Lösungen sind NICHT zugelassen. Handschriftliche Ergänzungen aus der Vorlesung können im Skript eingefügt sein, jedoch keine Lösungen bzw. Lösungsskizzen von Übungs- oder Klausuraufgaben und keine aus Büchern übernommene Passagen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Ich bin damit einverstanden, daß das Klausurergebnis unter Angabe meiner Matrikelnummer auf der Seite dieser Veranstaltung veröffentlicht wird. (Bei Nichtzutreffen bitten streichen.)

Viel Erfolg!

Punkte:

Note:

Aufgabe 1

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq -2 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot x, & \text{für } -2 < x \leq 0 \\ c_1 + c_2 \cdot (1 - \exp(-x)), & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$. (2 Pkt.)
- b) Zeigen Sie, dass $c_1 = \frac{1}{4}$ und $c_2 = \frac{3}{4}$. (3 Pkt.)
- c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 5)$. (2 Pkt.)

Lösung:

$$\text{a) } f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq -2 \\ \frac{1}{8}, & \text{für } -2 < x \leq 0 \\ c_2 \cdot \exp(-x), & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

b) Bestimmung von c_2 :

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &\stackrel{!}{=} 1 \quad (\text{Skript Satz 4.14}) \\ \int f(x) dx &= \int_{-2}^0 \frac{1}{8} dx + \int_0^{\infty} c_2 \cdot \exp(-x) dx \\ &= \left[\frac{1}{8}x \right]_{-2}^0 + c_2 \cdot [-\exp(-x)]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{4} + c_2 \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow c_2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Bestimmung von c_1 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) &\stackrel{!}{=} 1 \quad (\text{Skript Definition 4.10}) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} c_1 + \frac{3}{4} \cdot (1 - \exp(-x)) \\ &= c_1 + \frac{3}{4} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow c_1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Oder schneller:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= F_X(0) = \lim_{x \downarrow 0} F_X(x) = c_1 \\ 1 &= \lim_{x \uparrow \infty} F_X(x) = c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 5) &= F_X(5) - F_X(-1) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(1 - \exp(-5)) - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(-1) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\exp(-5) - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\ &= 0.8699465\end{aligned}$$

Aufgabe 2

- a) Gegeben seien die Mengen $A \subset B \subset \Omega$ und das Mengensystem $\mathcal{E} = \{A, B\}$.
Bestimmen Sie die von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra über Ω . (2 Pkt.)

- b) Berechnen Sie die Maße μ_Z , $\mu_Z|_{\mathbb{Z}}$, λ und $\lambda|_{[1,4]}$ für die Menge

$$C = [4, 5).$$

(2 Pkt.)

- c) Sei $\Omega_1 = \{1, 2, \dots, 6\}$ und

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 2\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \Omega_1\}$$

eine σ -Algebra auf Ω_1 . Weiterhin sei $\Omega_2 = \{a, b, c\}$ und $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega_2)$ eine σ -Algebra über Ω_2 .

Sei $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ mit

$$\omega \mapsto f(\omega) = \begin{cases} a & \omega \in \{1, 2, 3, 4\} \\ b & \omega \in \{5\} \\ c & \omega \in \{6\} \end{cases}$$

- i) Bestimmen Sie das Urbild $f^{-1}(\mathcal{F}_2)$. (2 Pkt.)
ii) Ist die Abbildung f \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 -messbar? (2 Pkt.)
d) Das Mengensystem $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ ist abzählbar oder } \bar{A} \text{ ist abzählbar}\}$ ist eine σ -Algebra über \mathbb{R} . Untersuchen Sie, ob die folgende Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{A} - \mathcal{B} -messbar ist. (2 Pkt.)

$$g(x) = x^2$$

- e) Untersuchen Sie, ob es sich bei der folgenden Funktion h um eine \mathcal{B} - \mathcal{B} -messbare Funktion handelt. (2 Pkt.)

$$h(x) = \exp(x) \cdot \mathbf{I}_{\mathbb{Q}}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lösung:

- a)

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{E}) &= \{\emptyset, A, B, \bar{A}, \bar{B}, \underbrace{A \cup B}_{=B}, \underbrace{\bar{A} \cup \bar{B}}_{=\Omega}, A \cup \bar{B}, \underbrace{\bar{A} \cup \bar{B}}_{=\bar{A}}, \underbrace{\overline{A \cup B}}_{B \setminus A}, \Omega\} \\ &= \{\emptyset, A, B, \bar{A}, \bar{B}, A \cup \bar{B}, B \setminus A, \Omega\} \end{aligned}$$

- b) $\mu_Z(C) = \infty$, $\mu_Z|_{\mathbb{Z}}(C) = 1$, $\lambda(C) = 1$, $\lambda|_{[1,4]}(C) = 0$.

- c) $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega_2) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \Omega_2\}$

- i) $f^{-1}(\{a\}) = \{1, 2, 3, 4\}$

$$f^{-1}(\{b\}) = \{5\}$$

$$f^{-1}(\{c\}) = \{6\}$$

$$f^{-1}(\{a, b\}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$f^{-1}(\{b, c\}) = \{5, 6\}$$

$$f^{-1}(\{a, c\}) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1$$

ii) Nein, denn $f^{-1}(\{c\}) = \{6\} \notin \mathcal{F}_1$.

d) Die Abbildung g ist nicht \mathcal{A} - \mathcal{B} -messbar, denn $[0, 1] \in \mathcal{B}$, aber

$$f^{-1}([0, 1]) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [0, 1]\} = [-1, 1] \notin \mathcal{A}$$

e) $\exp(x) \cdot I_{\mathbb{Q}}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$h_1(x) = \exp(x)$ ist messbar, da stetig auf \mathbb{R} , und $h_2(x) = I_{\mathbb{Q}}(x)$ ist messbar, da

$\mathbb{Q} \in \mathcal{B}$ (vgl. Bsp. 2.7 und Satz 2.7 iv)) $\xRightarrow{\text{Satz 2.18b)}} h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$ ist messbar.

Aufgabe 3

Sei X exponentialverteilt mit der Dichte

$$f_X(x; \lambda) = \lambda \exp(-\lambda \cdot x) \cdot I_{(0, \infty)}(x),$$

wobei $\lambda > 0$.

Bestimmen Sie anhand des Transformationssatzes für Dichten die Dichte der Zufallsvariablen

$$Y = g(X) = \frac{1}{X}.$$

(3 Pkt.)

Lösung:

$$\begin{aligned} y = g(x) &= \frac{1}{x} \\ \iff h(y) &= \frac{1}{y} \\ \frac{\partial h(y)}{\partial y} &= -\frac{1}{y^2} \\ f_Y(y) &= f_X(h(y)) \cdot \left| \frac{\partial h(y)}{\partial y} \right| \\ &= \lambda \cdot \exp\left(-\lambda \cdot \frac{1}{y}\right) \cdot \left| -\frac{1}{y^2} \right| \cdot I_{(0, \infty)}\left(\frac{1}{y}\right) \\ &= \lambda \cdot \exp\left(-\lambda \cdot \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{y^2} \cdot I_{(0, \infty)}\left(\frac{1}{y}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Es seien X_1, \dots, X_n unabhängig identisch verteilt mit folgender Dichte:

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -2, \\ \frac{1}{8} & \text{für } -2 < x \leq 0, \\ \frac{3}{4} \cdot \exp(-x) & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie anhand des zentralen Grenzwertsatzes die approximative Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} > 0.6\right) = ?$$

mit $n = 100$.

(5 Pkt.)

Hinweis: $\mathbb{E}(X_i^2) = \frac{7}{6}$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_i) &= \int_{-2}^0 \frac{1}{8} x \, dx + \int_0^{+\infty} \frac{3}{4} e^{-x} x \, dx \\ &\stackrel{\text{PI}}{=} \frac{1}{8} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 + \frac{3}{4} \left[\frac{e^{-x}}{-1} x \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{3}{4} \frac{e^{-x}}{(-1)} \, dx \\ &= \dots = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 0.5 \end{aligned}$$

$$\mathbb{V}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 = \frac{7}{6} - 0.5^2 = \frac{11}{12} \approx 0.917$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \geq 0.6\right) &= \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mathbb{E}(X_i)}{\sqrt{\frac{\mathbb{V}(X_i)}{n}}}}_{Z \sim N(0,1)} \geq \frac{0.6 - \mathbb{E}(X_i)}{\sqrt{\frac{\mathbb{V}(X_i)}{n}}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(10 \cdot \frac{0.6 - 0.5}{\sqrt{0.917}}\right) \\ &\stackrel{\text{Tabelle}}{\approx} 1 - \Phi(1.04) \\ &= 1 - 0.8508 = 0.1492 \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Abbildung mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{für } 1 < x \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{für } x > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Ist f die Dichte einer Verteilung auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$? (mit Begründung!)

(1 Pkt.)

(b) Die Zufallsvariable X besitze die Dichte

$$f_X(x) = 3x^2 I_{[0,1]}(x).$$

Gilt dann für die Zufallsvariable $Y = a + bX^2$ ($a, b \in \mathbb{R}$ fest):

$$\mathbb{E}(Y) = a + \frac{3}{5}b?$$

(mit Begründung!)

(1 Pkt.)

c) Sei λ das Lebesgue-Maß und

$$f_n(x) := n I_{[0, \frac{1}{n}]}(x), \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass

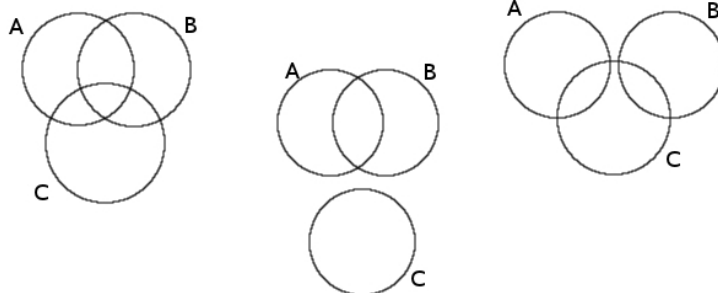
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\lambda \neq \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda.$$

(2 Pkt.)

d) Kennzeichnen Sie jeweils die Menge $(A \Delta B) \cap C$ in Abbildung 1.

(1 Pkt.)

Abbildung 1:



- e) Existiert ein zu folgender Funktion F gehörendes Lebesgue-Stieltjes-Maß λ_F ? (mit Begründung!)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1 \\ x & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ -x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{für } 1 \leq x \end{cases}$$

(1 Pkt.)

- f) In einer Ebene sind 10 Geraden gegeben, von denen keine zwei parallel sind und keine drei durch einen Punkt gehen. Wie viele Dreiecke bilden sie? (1 Pkt.)

Lösung:

- a) **Richtig**

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{!}{=} \int f(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{3}{2}} f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^{\frac{3}{2}} 1 dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 + [x]_1^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 = 1 \end{aligned}$$

- b) **Richtig**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(a + bX^2) \\ &= a + b \cdot \mathbb{E}(X^2) \\ &= a + b \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2 dx \\ &= a + b \int_0^1 3x^4 dx \\ &= a + b \left[\frac{3}{5} x^5 \right]_0^1 \\ &= a + \frac{3}{5} b \end{aligned}$$

- c)

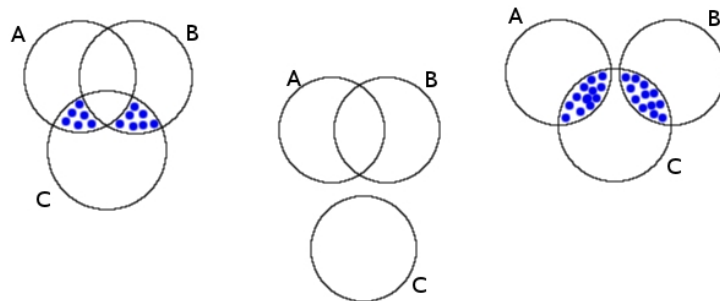
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int n I_{[0, \frac{1}{n})}(x) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \lambda\left(\left[0, \frac{1}{n}\right)\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{1}{n} - 0\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \\ \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} n I_{[0, \frac{1}{n})}(x) d\lambda = \int 0 d\lambda = 0. \end{aligned}$$

- d) Siehe Abbildung 2

- e) Nein, denn die Funktion F ist nicht monoton wachsend.

- f) $\binom{10}{3} = 120$

Abbildung 2:



x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.04	0.5160	1.04	0.8508	2.04	0.9793
0.09	0.5359	1.09	0.8621	2.09	0.9817
0.14	0.5557	1.14	0.8729	2.14	0.9838
0.19	0.5753	1.19	0.8830	2.19	0.9857
0.24	0.5948	1.24	0.8925	2.24	0.9875
0.29	0.6141	1.29	0.9015	2.29	0.9890
0.34	0.6331	1.34	0.9099	2.34	0.9904
0.39	0.6517	1.39	0.9177	2.39	0.9916
0.44	0.6700	1.44	0.9251	2.44	0.9927
0.49	0.6879	1.49	0.9319	2.49	0.9936
0.54	0.7054	1.54	0.9382	2.54	0.9945
0.59	0.7224	1.59	0.9441	2.59	0.9952
0.64	0.7389	1.64	0.9495	2.64	0.9959
0.69	0.7549	1.69	0.9545	2.69	0.9964
0.74	0.7704	1.74	0.9591	2.74	0.9969
0.79	0.7852	1.79	0.9633	2.79	0.9974
0.84	0.7995	1.84	0.9671	2.84	0.9977
0.89	0.8133	1.89	0.9706	2.89	0.9981
0.94	0.8264	1.94	0.9738	2.94	0.9984
0.99	0.8389	1.99	0.9767	2.99	0.9986

Tabelle 1: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.