

## Aufgabe 1

Gegeben sei  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  und  $\mathcal{E} = \{\{1, 3\}, \{3, 5\}\}$

- a) Bestimmen Sie die von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$  2 Pkt
- b) Betrachten Sie nun den Meßraum  $(\Omega, \mathcal{A})$  und die Abbildung

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x$$

Ist  $f$  eine  $\mathcal{A} - \mathcal{B}$  meßbare Abbildung, wobei  $\mathcal{B}$  wie üblich die Borelsche  $\sigma$ -Algebra bezeichnet? Geben Sie eine ausführliche Begründung! 2 Pkt

## Aufgabe 2

Gegeben sei die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x/4 & 0 \leq x < 1 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Begründen Sie warum  $F_X$  die Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist! 1 Pkt
- b) Bestimmen Sie ein Maß  $\mu$  und eine Dichte  $f$  so, dass  $P_X = f \odot \mu$  (im Sinne von Radon-Nikodym), wobei  $P_X$  das Bildmaß einer Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F_X$  ist. 2 Pkt
- c) Berechnen Sie  $P(X \in (0.5, 1.5)) = P_X((0.5, 1.5))$ . 1 Pkt
- d) Berechnen Sie den Erwartungswert  $E(X)$ . 2 Pkt

**Hinweis:** In (c) und (d) sind die Ergebnisse entweder als exakte Formeln oder auf zwei Kommastellen genau gerundet anzugeben.

## Aufgabe 3

$X_1, \dots, X_k$  seien stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit  $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$

- a) Berechnen Sie die Dichtefunktion von  $Y_1 = X_1^2$ . 2 Pkt
- b) Wie bezeichnet man üblicherweise die Verteilung von  $Y_1$ ? 1 Pkt
- c) Welchen Erwartungswert hat  $Y_1$ ? (Begründung!) 1 Pkt
- d) Berechnen Sie die Momenterzeugende Funktion von  $Y_1$ . 2 Pkt
- e) Zeigen Sie, dass  $\sum_{i=1}^k X_i^2 \sim \chi_k^2$  gilt, also dass die Quadratsumme von  $k$  standard-normalverteilten Zufallsvariablen Chi-Quadrat verteilt ist mit  $k$  Freiheitsgraden. 2 Pkt

### Aufgabe 4

Der zufällige Vektor  $(U, V)$  sei gleichverteilt im Einheitskreis, d.h.

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{für } u^2 + v^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $X = U/V$  Cauchy-verteilt ist.

4 Pkt

#### Hinweis:

Verwenden Sie zunächst die bivariate Transformation  $g(u, v) = (u/v, v)$  und achten Sie anschließend auf die Integrationsgrenzen. Überlegen Sie sich dazu genau, wo in Abhängigkeit der transformierten Variablen die Dichte gleich 0 ist.

Die Dichte der Cauchy-Verteilung mit Parameter  $s > 0$  und  $t \in \mathbb{R}$  lautet:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{s}{s^2 + (x-t)^2}.$$

### Aufgabe 5

In einer Schachtel befindet sich ein schwarzer und ein weißer Stein. In einer zweiten Schachtel befinden sich zwei schwarze und ein weißer Stein. Eine Schachtel wird zufällig gewählt und daraus zufällig ein Stein gezogen.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Stein schwarz? 1 Pkt
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um die erste Schachtel, wenn der gezogene Stein weiß war? 1 Pkt