

Nachklausur

Wahrscheinlichkeitstheorie und Inferenz I

Wintersemester 2010/2011

Prof. Dr. Torsten Hothorn
Institut für Statistik

Name: Name, Vorname

Matrikelnummer: 0123456

Wichtig:

- Überprüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Die Klausur besteht aus fünf Aufgaben, einem Deckblatt und der Standardnormalverteilung im Anhang. Tragen Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer lesbar ein.
- Verwenden Sie für Ihre Lösungen ausschließlich den Klausurbogen (Vorder- und Rückseite), Zusatzblätter werden auf Anfrage ausgeteilt.
- Als Hilfsmittel zugelassen sind alle Mitschriften der Vorlesung und der Übung, das ausgedruckte Skript sowie Bücher und ein Taschenrechner.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Ich bin damit einverstanden, daß das Klausurergebnis unter Angabe meiner Matrikelnummer auf der Seite

<http://www.stat.uni-muenchen.de/~hothorn>

veröffentlicht wird. (Bei Nichtzutreffen bitten streichen.)

Es sind insgesamt 30 Punkte zu erreichen. 100% bearbeitete Übungsaufgaben entsprechen 4.5 Bonuspunkten.

Aus 0% bearbeiteten Übungsaufgaben haben Sie bereits **0** Bonuspunkte erworben.

Viel Erfolg!

Punkte:

Note:

Aufgabe 1

Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{-r}{x} p^r (p-1)^x & \text{für } x \in \{0, 1, 2, \dots\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

mit $p \in (0, 1)$ und $r \in \mathbb{N}$.

- (a) Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion der Verteilung von X . (3 Pkt.)
 (b) Berechnen Sie anhand der momenterzeugenden Funktion den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ der Zufallsvariablen X . (2 Pkt.)

Hinweis: $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} \cdot y^k \cdot z^{-n-k} = (y+z)^{-n}$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} M_X(s) &= \mathbb{E}(\exp(sX)) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \exp(sx) \binom{-r}{x} p^r (p-1)^x \\ &= p^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{x} (\exp(s)(p-1))^x \cdot 1^{-r-x} \\ &= p^r (1 + \exp(s) \cdot (p-1))^{-r} \\ &= \left(\frac{p}{1 + \exp(s) \cdot (p-1)} \right)^r \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial M_X(s)}{\partial s} \right|_{s=0} &= p^r \cdot (-r) \cdot (1 + \exp(s)(p-1))^{-r-1} \cdot (p-1) \exp(s) \Big|_{s=0} \\ &= p^r \cdot r \cdot (1 + p - 1)^{-r-1} \cdot (1 - p) \\ &= r \cdot p^{r-r-1} \cdot (1 - p) \\ &= \frac{r \cdot (1 - p)}{p} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Sei U eine stetig gleichverteilte Zufallsvariable $U \sim U(0, 1)$.

Berechnen Sie die Dichte $f_X(x)$ der Zufallsvariablen

$$X = \log \left(\frac{U}{1-U} \right).$$

Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ ist $f_X(x) > 0$?

(3 Pkt.)

Lösung:

$$f_U(u) = 1 \quad \text{für } u \in [0, 1]$$

$$X = \log \left(\frac{U}{1-U} \right)$$

$$\Rightarrow \exp(X) = \frac{U}{1-U} \Rightarrow \dots \Rightarrow h(X) = g^{-1}(X) = U = \frac{\exp(X)}{1 + \exp(X)}$$

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\exp(x)}{1 + \exp(x)} = \frac{e^x(1 + e^x) - e^x e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{\exp(x)}{(1 + \exp(x))^2}$$

$$f_X(x) = f_U(h(x)) \cdot \left| \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right| = \frac{\exp(x)}{(1 + \exp(x))^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3

Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = cx(y - x)e^{-y}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad x \leq y < \infty.$$

a) Zeigen Sie, dass die Konstante $c = 1$. (3 Pkt.)

b) Bestimmen Sie die Randdichte $f_Y(y)$. (3 Pkt.)

Hinweis: x kann Werte $0 \leq x \leq y$ annehmen.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_x^\infty cx(y - x)e^{-y} dy dx &= \int_0^\infty \int_x^\infty \underbrace{(y - x)}_u \underbrace{cx e^{-y}}_{v'} dy dx = \\ &\stackrel{\text{PI}}{=} \int_0^\infty \underbrace{\left[(y - x) cx \frac{e^{-y}}{-1} \right]_x^\infty}_{=0} - \left(\int_x^\infty cx \frac{e^{-y}}{-1} dy \right) dx \\ &= \int_0^\infty cx \left[\frac{e^{-y}}{-1} \right]_x^\infty dx \\ &= c \int_0^\infty x e^{-x} dx \\ &\stackrel{\text{PI}}{=} c \underbrace{\left[x \frac{e^{-x}}{-1} \right]_0^\infty}_{=0} - c \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{-1} dx \\ &= c \left[\frac{e^{-x}}{-1} \right]_0^\infty = c \stackrel{!}{=} 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^y f_{X,Y}(x, y) dx \\ &= \int_0^y x(y - x)e^{-y} dx \\ &= e^{-y} \int_0^y (xy - x^2) dx \\ &= e^{-y} \left(\left[\frac{x^2 y}{2} \right]_0^y - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^y \right) \\ &= e^{-y} \left(\frac{y^3}{2} - \frac{y^3}{3} \right) = \frac{e^{-y} y^3}{6} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Die Zufallsvariablen X, Y und Z seien unabhängig mit

$$\begin{aligned}X &\sim U(1, 3), \\Y &\sim \text{Exp}(2), \\Z &\sim P(1).\end{aligned}$$

Sei

$$U = X \cdot Y - Z$$

und U_1, \dots, U_n eine Stichprobe von unabhängigen wie U verteilten Zufallsvariablen.

- a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von U . (3 Pkt.)
b) Bestimmen Sie über den Zentralen Grenzwertsatz die asymptotische Verteilung von

$$U^* = \sum_{i=1}^n U_i.$$

(2 Pkt.)

- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n U_i \leq \sqrt{n} \right). \quad (2 \text{ Pkt.})$$

Hinweis: Die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung finden Sie im Anhang.

Lösung:

- a) Wir wissen:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 2, & \mathbb{V}(X) &= \frac{1}{3} \\ \mathbb{E}(Y) &= \frac{1}{2}, & \mathbb{V}(Y) &= \frac{1}{4} \\ \mathbb{E}(Z) &= 1, & \mathbb{V}(Z) &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{V}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{3} + 2^2 = \frac{13}{3} \\ \mathbb{E}(Y^2) &= \mathbb{V}(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ \mathbb{E}(Z^2) &= \mathbb{V}(Z) + (\mathbb{E}(Z))^2 = 1 + 1^2 = 2.\end{aligned}$$

Nun können wir den Erwartungswert und die Varianz von U wie folgt berechnen:

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Z) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$$

Da X und Y unabhängig, sind auch X^2 und Y^2 unabhängig:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(U) &= \mathbb{E}(U^2) - (\mathbb{E}(U))^2 \\ &= \mathbb{E}[(X \cdot Y - Z)^2] - 0 \\ &= \mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}(Y^2) - 2 \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y) \mathbb{E}(Z) + \mathbb{E}(Z^2) \\ &= \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = \frac{13}{6}.\end{aligned}$$

b) Wegen der Unabhängigkeit gilt:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n U_i \right] = n \cdot \mathbb{E}(U) = 0, \quad \mathbb{V} \left[\sum_{i=1}^n U_i \right] = n \cdot \mathbb{V}(U) = \frac{13}{6} n.$$

Mit dem Zentralen Grenzwertsatz folgt:

$$\frac{\sum_{i=1}^n U_i}{\sqrt{\frac{13}{6}n}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

c)

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\sum_{i=1}^n U_i \leq \sqrt{n} \right] &= \mathbb{P} \left[\frac{\sum_{i=1}^n U_i - n\mathbb{E}(U)}{\sqrt{n\mathbb{V}(U)}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n \cdot 13/6}} \right] \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi \left(\sqrt{\frac{6}{13}} \right) \approx 0.752 \end{aligned}$$

Aufgabe 5

- a) 10 Ehepaare verabschieden sich voneinander mit Händedruck und gehen paarweise nach Hause (d.h. die Ehepartner verabschieden sich nicht voneinander).

Wie oft werden Hände gedrückt?

(1 Pkt.)

- b) Sei $\Omega = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$ und

$$\mu(A) = \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a \leq n, \forall a \in A\} & \text{falls } A \neq \emptyset \text{ und } A \text{ beschränkt} \\ \infty & \text{falls } A \text{ unbeschränkt} \\ 0 & \text{falls } A = \emptyset. \end{cases}$$

Ist μ ein Maß? (Mit Begründung)

(2 Pkt.)

- c) Sei

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, (-\infty, 1], (1, \infty), \mathbb{R}\}, \quad \Omega_1 = \mathbb{R},$$

$$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, [0, 1/4], (1/4, 1], [0, 1]\}, \quad \Omega_2 = [0, 1], \text{ und}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist die Abbildung g \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 messbar?

(2 Pkt.)

- d) Die Zufallsvariablen X und Y haben die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Wie müssen X und Y verteilt sein, damit sie auch unabhängig sind?

(1 Pkt.)

- e) Unter den Studenten einer Universität seien 40% männlich und 60% weiblich. 50% der Männer und 30% der Frauen rauchen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Raucher männlich ist?

(3 Pkt.)

Lösung:

- a)

$$4 \cdot \binom{10}{2} = 180, \quad \text{bzw.} \quad 4 \cdot \sum_{i=1}^9 i = 4 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 180$$

- b) Nein, denn (M3) ist nicht erfüllt: Sei $A_1 = [0, 0.9]$ und $A_2 = [2, 2.9]$.

$$\mu(A_1 \cup A_2) = 3 \neq 4 = \mu(A_1) + \mu(A_2) = 1 + 3.$$

- c) Nein! Zu überprüfen:

$$g^{-1}(\mathcal{A}_2) \in \mathcal{A}_1 \quad \text{d.h.}$$

$$g^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1, \quad \forall A \in \mathcal{A}_2.$$

$$g^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}_1$$

$$g^{-1}([0, 1/4]) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [0, 1/4]\} = (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \notin \mathcal{A}_1$$

$$g^{-1}((1/4, 1]) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in (1/4, 1]\} = [0, 2] \notin \mathcal{A}_1$$

Die Abbildung g ist nicht \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 messbar.

d) X und Y müssen normalverteilt sein.

e) $\mathbb{P}(M) = 0.4$, $\mathbb{P}(\bar{M}) = 0.6$, $\mathbb{P}(R|M) = 0.5$, $\mathbb{P}(R|\bar{M}) = 0.3$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M|R) &= \frac{\mathbb{P}(R|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(R)} \quad (\text{Definition der bedingten Wkt}) \\ &= \frac{\mathbb{P}(R|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(R|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(R|\bar{M})\mathbb{P}(\bar{M})} \\ &= \frac{0.5 \cdot 0.4}{0.5 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6} \approx 0.526\end{aligned}$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.05	0.5199	0.97	0.8340	1.89	0.9706
0.10	0.5382	1.02	0.8452	1.94	0.9736
0.14	0.5565	1.06	0.8559	1.98	0.9763
0.19	0.5746	1.11	0.8661	2.03	0.9787
0.23	0.5925	1.15	0.8757	2.07	0.9810
0.28	0.6103	1.20	0.8849	2.12	0.9830
0.33	0.6278	1.25	0.8936	2.17	0.9848
0.37	0.6451	1.29	0.9018	2.21	0.9865
0.42	0.6620	1.34	0.9096	2.26	0.9880
0.46	0.6787	1.38	0.9168	2.30	0.9894
0.51	0.6950	1.43	0.9236	2.35	0.9906
0.56	0.7109	1.48	0.9300	2.40	0.9917
0.60	0.7264	1.52	0.9360	2.44	0.9927
0.65	0.7415	1.57	0.9416	2.49	0.9936
0.69	0.7562	1.61	0.9467	2.53	0.9944
0.74	0.7704	1.66	0.9515	2.58	0.9951
0.79	0.7841	1.71	0.9560	2.63	0.9957
0.83	0.7973	1.75	0.9601	2.67	0.9962
0.88	0.8100	1.80	0.9639	2.72	0.9967
0.92	0.8223	1.84	0.9674	2.76	0.9971

Tabelle 1: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.