

Aufgabe 1

Das Mengensystem $\mathcal{A} = \{A : A \text{ ist abzählbar oder } \overline{A} \text{ ist abzählbar}\}$ ist eine σ -Algebra über \mathbb{R} . Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils \mathcal{A} - \mathcal{B} -messbar sind, wobei es sich bei \mathcal{B} um die Borelmengen handelt.

1. $f(x) = x$ 1 Pkt
2. $f(x) = \lfloor x \rfloor$, d.h. Rundung nach unten 1 Pkt
3. $f(x) = I_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ 1 Pkt

Aufgabe 2

Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig und jeweils Poisson-verteilt mit Parameter λ_1 und λ_2 .

1. Zeigen Sie, dass $Z = X_1 + X_2$ wieder Poisson-verteilt ist, und zwar mit Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$. 2 Pkt

Hinweis:

Die Dichte der Poissonverteilung mit Parameter λ lautet: $f(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Weiterhin können Sie den binomischen Lehrsatz $(\lambda_1 + \lambda_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda_1^k \cdot \lambda_2^{n-k}$ verwenden.

2. Zeigen Sie, dass

$$P(X_1 = k | Z = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

wobei $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

2 Pkt

3. Formulieren Sie die mathematische Aussage von (b) in Worten. Geben Sie speziell auch den Namen der resultierenden Verteilung. 1 Pkt

Aufgabe 3

Sei λ das Lebesgue-Maß und $f_n : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, $f_n(x) = [\cos(x^3)]^n$.

1. Bestimmen Sie $\int_{(0,1)} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda$ 2 Pkt
2. Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0,1)} f_n d\lambda$

Geben Sie eine ausführliche Begründung für Ihre Antwort.

2 Pkt

Aufgabe 4

Die Zufallsvariablen X und Y seien stochastisch unabhängig und jeweils exponentialverteilt mit Parameter λ . Berechnen Sie die Dichte und die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $U = X/Y$. 4 Pkt

Hinweis: Verwenden Sie zunächst die bivariate Transformation $g(x, y) = (x/y, y)$. Die

Dichte einer exponentialverteilten Zufallsvariable lautet: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Aufgabe 5

Sei $X_i, i \in \mathbb{N}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, jeweils mit Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1/2 + x/4, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Weiterhin seien gegeben:

$$G_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x]}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{X_i \leq x\}}, \quad Y_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad Z_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$$

1. Berechnen Sie $\mu := \mathbb{E}(X_i)$ und $\sigma^2 := \mathbb{V}(X_i)$. 2 Pkt
2. Für welche Funktion $G(x)$ gilt $G_n(x) \xrightarrow{\text{f.s.}} G(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$?
Welchen Namen hat der entsprechende Satz? 2 Pkt
3. Für welche Zufallsvariable Y gilt $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$?
Wie lautet das entsprechende wahrscheinlichkeitstheoretische Gesetz? 2 Pkt
4. Für welche Zufallsvariable Z gilt $Z_n \xrightarrow{\mathbb{D}} Z$?
Wie lautet das entsprechende wahrscheinlichkeitstheoretische Gesetz? 2 Pkt