Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden Matrizen und Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:

a) AB

b) $(AB)^T$

c) $det(A)$

d) C^{-1}

e) B^T

f) $B^T A^T$

g) ab

h) ba

i) $\langle a, a \rangle$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die Funktion $f : [\frac{1}{4}, 100] \longrightarrow (0, \infty) : x \mapsto \sqrt{x} \cdot \exp(-x)$ auf lokale und globale Extrema.

Aufgabe 3

Wir betrachten einen Sparer, der zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Kapital $K_0 = K$ auf einem Sparbuch anlegt. Sei jetzt i der Zinssatz, mit dem das Guthaben pro Jahr verzinst wird. Wenn also am Anfang des Jahres t ein Guthaben von K_t vorlag, so beträgt das Guthaben zu Anfang des Jahres $t + 1$ entsprechend

$$K_{t+1} = K_t \cdot (1 + i).$$

Für beliebige Zeitpunkte $t \in \mathbb{N}$ ergibt sich so ein Kapital

$$K_t = K \cdot (1 + i)^t \qquad (*)$$

a) Ist die Gleichung (*) eine explizite oder eine rekursive Vorschrift für das Kapital zum Zeitpunkt t?

b) Berechnen Sie den järlichen absoluten Zuwachs $Z_t = K_{t+1} - K_t$ des Kapitals, geben Sie eine explizite Vorschrift an.

c) Wandeln Sie die in b) gegebene explizite Vorschrift für den Zuwachs Z_t in eine rekursive Vorschrift um.

d) Um welche Zahlenfolge handelt es sich bei der Zahlenfolge Z_t ?

e) Berechnen Sie den Gesamtzuwachs $Z = \sum_{i=0}^{n} Z_i$ der bis zum Zeitpunkt $t = n + 1$ erfolgten Zinszahlungen.

Aufgabe 4

Kreuzen Sie die richtige Antwort an!

1. Der Differenzenquotient der Funktion $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x)$ lautet:

   ◯ $\frac{1}{x}$ ◯ $\frac{1}{x+\Delta}$ ◯ $\frac{\ln(x+\Delta)}{\Delta}$ ◯ $\frac{\ln(\frac{x+\Delta}{x})}{\Delta}$ ◯ $\frac{\ln(\frac{x+\Delta}{\Delta})}{\Delta}$

2. Der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ ist

   ◯ 1 ◯ 2 ◯ 3 ◯ 4

3. Das Integral $\int\limits_{-1}^{1} e^{|x|}\,dx$ besitzt den Wert

   ◯ e ◯ $2e$ ◯ $2e - 2$ ◯ $2e - 1$

4. Die Folge $a_n = \frac{\frac{25}{3}n^3 + \frac{2}{7}n^2}{\frac{5}{6}n^3 - \frac{1}{4}n + 1}$ konvergiert

   ◯ nicht ◯ gegen 0
   ◯ gegen $\frac{25}{2}$ ◯ gegen 10

5. Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2a(x - b)$ mit $a, b \in (0, \infty)$ beliebig besitzt die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch die Abbildungsforschrift

   ◯ $f^{-1}(x) = \frac{x+2ab}{2a}$ ◯ $f^{-1}(x) = x + 2ab$
   ◯ $f^{-1}(x) = 2a$ ◯ $f^{-1}(x) = \frac{x}{2a} + ab$

Aufgabe 5

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

1. Bei der geometrischen Reihe ist die Differenz von Nachfolger und Vorgänger eines Folgengliedes für jedes Folgenglied die gleiche.

   richtig ◯ falsch ◯

2. Die Gleichung $2^x = 3 + x$ besitzt eine relle Lösung.

   richtig ◯ falsch ◯

3. Die Exponentialreihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ ist für alle $a \in \mathbb{R}$ konvergent.

   richtig ◯ falsch ◯

4. Für jede injektive Funktion f existiert die Umkehrfunktion f^{-1}.

   richtig ◯ falsch ◯

5. Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit konstanter Ableitung sind immer linear.

   richtig ◯ falsch ◯

6. Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow R : x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ ist konvex.

   richtig ◯ falsch ◯

7. Die leere Menge enthält sich selbst.

   richtig ◯ falsch ◯

8. Die Zahlenfolge $a_n = 1 - n$ ist nach oben beschränkt.

   richtig ◯ falsch ◯