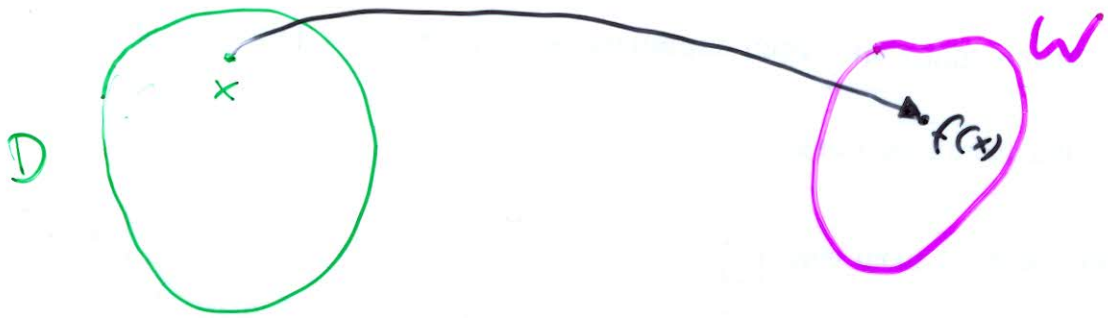
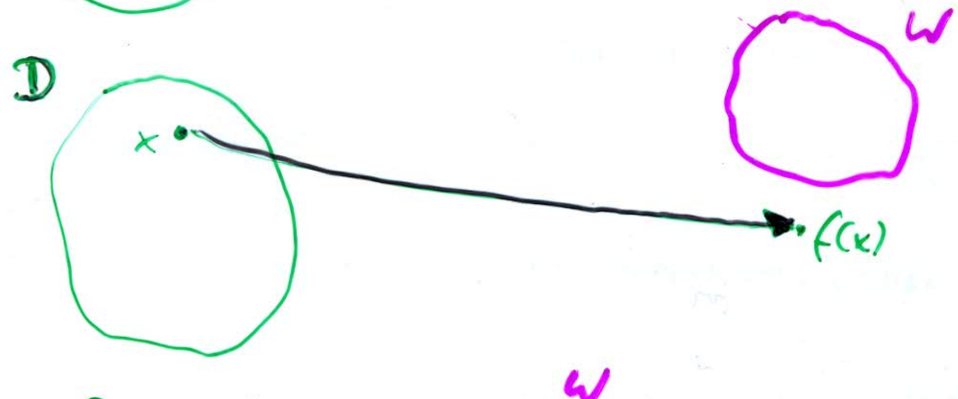
$f: D \longrightarrow W : x \longmapsto f(x)$

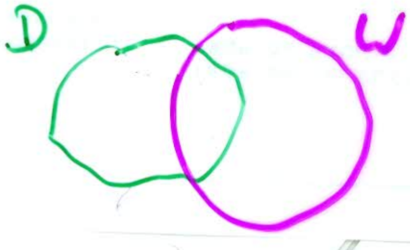
f ist als Funktion wohldefiniert falls jedem Argument x aus dem Definitionsbereich D genau ein Funktionswert y aus dem Wertebereich W zugeordnet wird.



Ausgeschlossen:



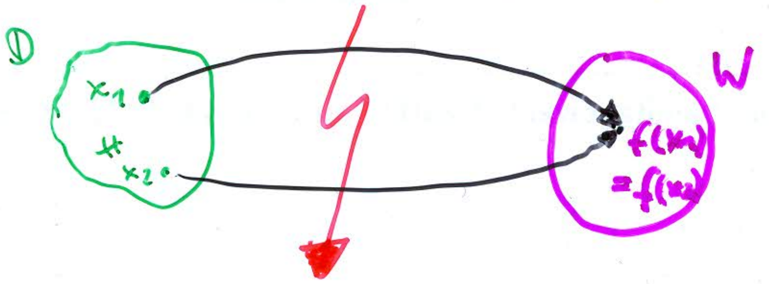
möglich:



f heißt injektiv falls es keine zwei verschiedene Argumente x_1, x_2 mit gleichem Funktionswert $f(x_1)=f(x_2)$ gibt:

$$\forall x_1, x_2 \in D: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

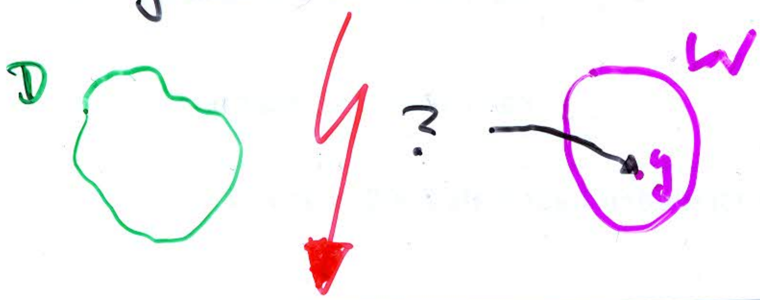
bzw.: $\forall x_1, x_2 \in D: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$



---

f heißt surjektiv falls es für jedes Element y des Wertebereiches W ein Argument x des Definitionsbereichs D gibt, das auf den Funktionswert y abgebildet wird:

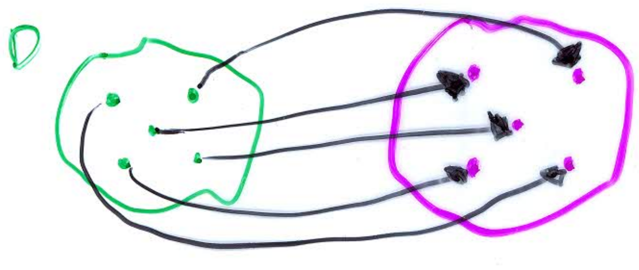
$$\forall y \in W \; \exists x \in D: f(x) = y$$



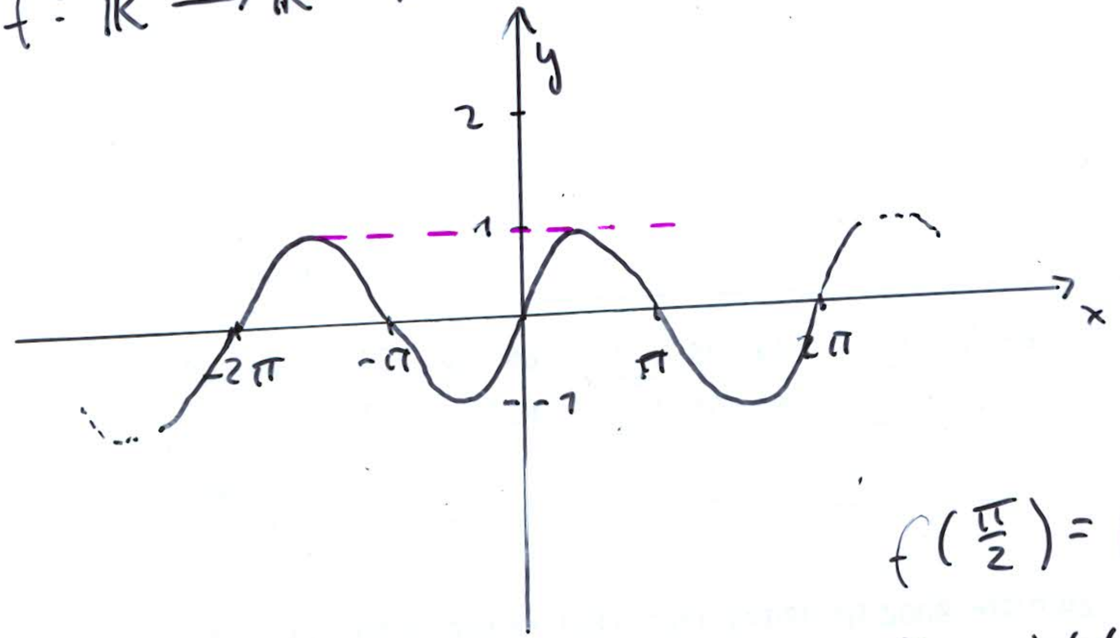
---

f heißt bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist, d.h. falls es für jedes Element $y \in W$ genau ein Argument $x \in D$ gibt mit $f(x) = y$.

(Man sagt, es gibt eine 1 zu 1 Beziehung)



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto \sin(x)$



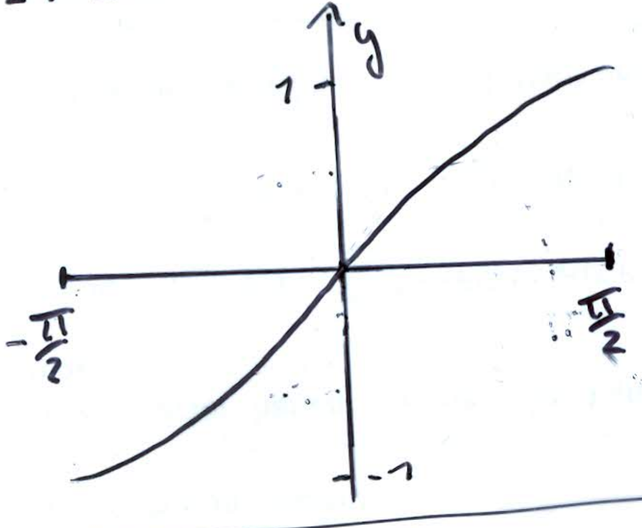
$f(\frac{\pi}{2}) = f(-\frac{3}{2}\pi) = 1$

$\Rightarrow$ nicht injektiv

$f(x) = 2$?

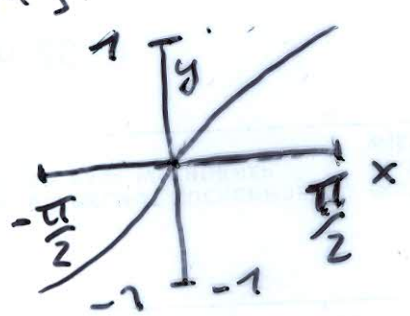
$\Rightarrow$ f nicht surjektiv, da es kein Argument $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin(x) = 2$ gibt.

$g: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}: x \mapsto \sin x$



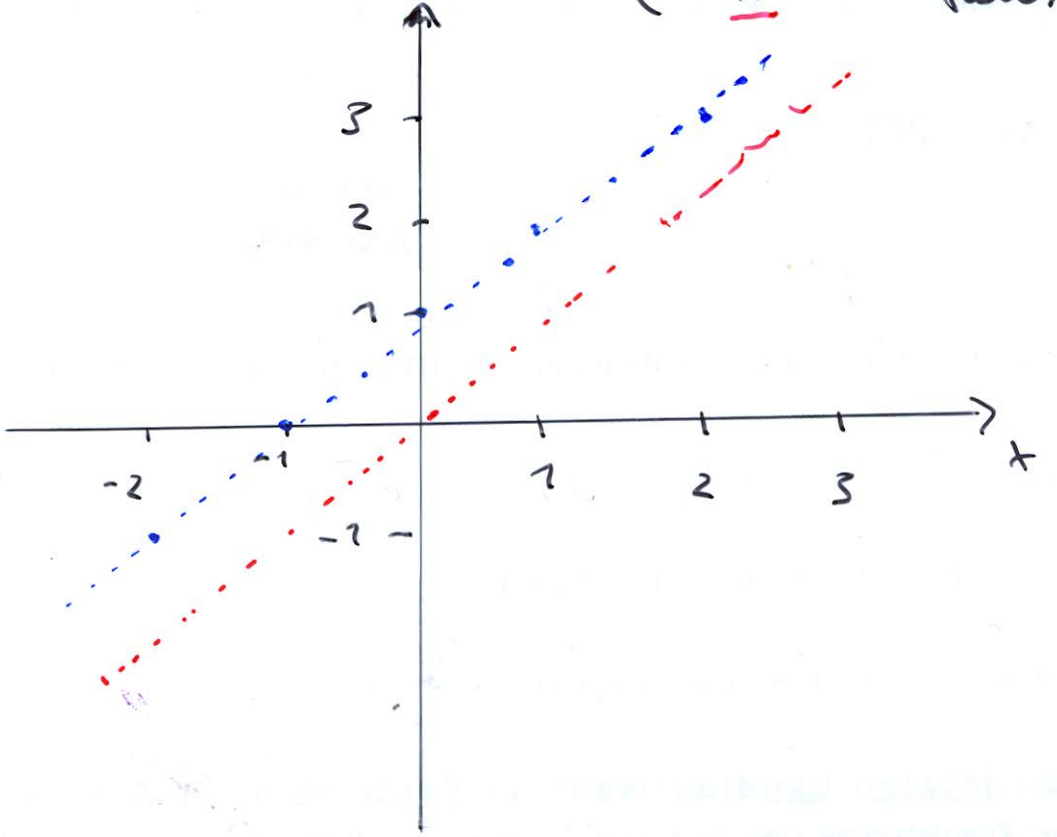
g ist injektiv, aber nicht surjektiv, da es kein $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gibt mit $\sin(x) = 2$

$h: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$



h ist injektiv + surjektiv, also bijektiv.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ x & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$



Ist bijektiv. Versuche Umkehrfkt aufzustellen (gedanklich Rolle von x und y vertauschen, also Diagramm gedanklich drehen)

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: y \mapsto \begin{cases} y-1 & \text{falls } y \text{ rational} \\ y & \text{falls } y \text{ irrational} \end{cases}$$

---

f ist injektiv, denn: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$ entweder

$f(x_1)$ rational $\Rightarrow f(x_1) = x_1 + 1 = x_2 + 1 = f(x_2)$
$\Rightarrow x_1 = x_2$

oder $f(x_1)$ irrational $\Rightarrow f(x_1) = x_1 = x_2 = f(x_2)$.

---

f ist surjektiv, denn man kann für $y \in \mathbb{R}$ einfach $x = f^{-1}(y)$ betrachten und erhält: $f(x) = f(f^{-1}(y)) = \begin{cases} y-1+1 & \text{falls } y \text{ rational} \\ y & \text{falls } y \text{ irrational} \end{cases}$
also $f(x) = y$.