Aufgabe 1

Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \arctan(x)$
b) $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$
c) $f(x) = a^x \qquad (a \neq 0)$
d) $f(x) = \sin(x)^{\cos(x)+1}$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf lokale und globale Extrema.

a) $f(x) = e^{x^2}$
b) $f(x) = x$
c) $f(x) = x^3$
d) $f(x) = x^4$

Aufgabe 3

Man untersuche folgende Funktionen auf Monotonie:

a) $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x)$
b) $g : [20, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \cdot \exp(-x)$

Aufgabe 4

Sind die folgenden Funktionen (strikt) konvex oder (strikt) konkav?

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \exp(x)$
b) $g : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x)$
c) $h : (0, \infty) : x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Gewinnfunktion eines Unternehmens bei vollständiger Konkurrenz streng konkav ist.
Sei dazu x $(x > 0)$ die Menge des Gutes, welches das Unternehmen herstellt, $p > 0$ der feste Preis (aufgrund der Annahme der vollständigen Konkurrenz muss das Unternehmen den Preis als gegeben betrachten und kann ihn nicht selbst beeinflussen) und

$$c(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$$

die Kostenfunktion, wobei $\alpha, \beta, \gamma > 0$ (also eine quadratische Kostenfunktion).
Hinweis:

Die Gewinnfunktion ergibt sich als Differenz von Erlös (Preis · Menge) und Kosten.