Aufgabe 1
Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Differentialquotienten $\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta}$ von f für die unten angegebenen Funktionsvorschriften und berechnen Sie anschließend die Ableitungen.

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = x^2$.

Aufgabe 2 (Differentiationsregeln) Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen. (Wenn nicht anders angegeben ist der Definitions- und Wertebereich jeweils $\mathbb{R}$.)

a) $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$, Definitionsbereich $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, Wertebereich $\mathbb{R}$)

b) $f(x) = \exp(x)$

c) $f(x) = \sin(x)$

d) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

e) $f(x) = \tan(x)$ (Definitionsbereich $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, Wertebereich $\mathbb{R}$)

f) $f(x) = e^{e^x}$

g) $f(x) = ln(x)$ (Definitionsbereich $(0, \infty)$, Wertebereich $\mathbb{R}$)

h) $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$

i) $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$

Aufgabe 3
Gegeben Sei die Funktion

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \\ x \quad &\mapsto \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

a) Ist die Funktion stetig?

b) Ist die Funktion differenzierbar? (Betrachten Sie die Stelle $x_0 = 0$.)

Aufgabe 4
Berechnen Sie die zweiten Ableitungen folgender Funktionen (Definitions- und Wertebereich jeweils $\mathbb{R}$):

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = \sin(x)$

c) $f(x) = \exp\{\lambda x\}$

d) $f(x) = \exp\{x^2\}$

e) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.