Aufgabe 1

Ermitteln Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen:

a) $a_n = \frac{2^n}{n+1}$

b) $b_n = \sqrt{\frac{1}{n+1}}$

Hinweise: Für a) können Sie sich zunächst klar machen, dass das exponentielle Wachstum 2^n schneller ist als das Wachstum von n bzw. jeder beliebigen polynomialen Funktion. Dies sieht man recht einfach wenn man die Definition der Exponentialfunktion als Reihe anschaut.
Bei b) kann man explizit durch Anwenden der Definition des Grenzwertes zeigen, dass die Folge gegen de Grenzwert 0 konvergiert.

Aufgabe 2

Für eine feste relle Zahl x sei die Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ mit zugehöriger Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{i=0}^{n} a_i$ gegeben. Für welche Werte von x ist die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergent? Unterscheiden Sie dazu die Fälle $|x| < 1, \quad x = -1, \quad x = 1$ und $|x| > 1$. Benutzen Sie zur Analyse der Konvergenz das Quotientenkriterium, den Satz über die alternierende Reihe und die Tatsache, dass die Harmonische Reihe divergent ist. Für den Fall $|x| > 1$ können sie die Tatsache benutzen, dass für eine konvergente Zahlen**folge** notwendigerweise die Differenz aufeinanderfolgender Glieder gegen 0 konvergieren muss.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

nicht stetig ist.

Aufgabe 4

Besitzt die Gleichung $x^4 = x + 1$ eine reelle Lösung?