Aufgabe 1

Gegeben sei die konvergente rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \end{aligned}$$

wobei a eine feste positive relle Zahl sei. Der (von Null verschiedene) Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ sei mit c bezeichnet.

a) Wie lautet der Grenzwert der Folge $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$?

b) Berechnen Sie unter Verwendung der Rechenregeln für Grenzwerte den Wert von c.

Aufgabe 2

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$ die zugehörige Folge der Partialsummen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Geben Sie eine rekursive Vorschrift für die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

b) Sein nun im Folgenden immer $a_n = a_0 \cdot q^n$ die geometrische Folge ($q \in (-1, 1)$). Wie lautet die rekursive Vorschrift für $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in diesem Fall?

c) Geben Sie unter Verwendung von Aufgabe 3b) des 3. Übungsblattes eine explizite Vorschrift für $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

d) Ist die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergent und wenn ja, dann bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 3

Wie lauten die Partialsummen und die Grenzwerte der geometrischen Reihen

a) $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c \cdot q^k$

b) $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c \cdot q^k$