### Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Skizzieren Sie die Funktion und bestimmen Sie den Bildbereich von $f$. Ist $f$ injektiv? bestimmen Sie in diesem Fall die Umkehrfunktion $f^{-1}$.

### Aufgabe 2

a) Was ist der Unterschied zwischen einer rekursiv und einer explizit gegebenen Zahlenfolge?

b) Beschreiben Sie verbal, wie sich bei einer arithmetischen Zahlenfolge unmittelbar aufeinander folgende Folgeglieder zueinander verhalten.

c) Beschreiben Sie verbal, wie sich bei einer geometrischen Zahlenfolge unmittelbar aufeinander folgende Folgeglieder zueinander verhalten.

d) Leiten Sie aus den obigen Beschreibungen eine explizite Darstellung für die arithmetische und die geometrische Zahlenfolge ab.

### Aufgabe 3

Gegeben seien die beide Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \frac{a_0}{1-q}(1-q^{n+1})$$

und

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_{n+1} &= b_n + a_0 \cdot q^{n+1} \end{aligned}$$

wobei $a_0$ eine beliebige aber feste positive reelle Zahl ist und $q$ aus dem Intervall $(-1, 1)$ stammt.

a) Welche Folge ist rekursiv definiert und welche Folge ist explizit gegeben?

b) Zeigen Sie, dass die beiden Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ übereinstimmen. Drücken Sie dazu das $n$ plus erste Folgenglied der explizit gegebenen Zahlenfolge als Funktion des $n$-ten Folgengliedes dieser Zahlenfolge aus (d.h. beschreiben Sie die explizit gegebene Zahlenfolge rekursiv) und formen Sie anschließend so um, dass Sie die Gleicheit der beiden Zahlenfolgen erkennen können.

### Aufgabe 4

Sind die die Folgen jeweils konvergent? Wenn ja dann ermittelnSie den Grenzwert (an dieser Stelle ist keine genaue Argumentation gefordert).

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = 2n$