Aufgabe 1

Der Nutzen einer Konsumentin bzgl. zwei Gütern x und y, deren Preise $p_x = 2$ und $p_y = 3$ Geldeinheiten betragen, lasse sich durch die Nutzenfunktion $u(x,y) = x^{0.5}y^{0.5}$ darstellen. Dabei ist darauf zu achten, dass als verfügbares Budget 80 Geldeinheiten zur Verfügung stehen.

a) Stellen Sie das zugehörige Optimierungsproblem auf.

b) Lösen Sie das Nutzenmaximierungsproblem unter Nebenbedingungen mit der Lagrangemethode.

a) Maximiere die Funktion

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^{0.5}y^{0.5}$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = 2x + 3y - 80 = 0 \qquad \text{(und } x, y \geq 0) \ .$$

Bemerkung: Die Ungleichungsbedingung kann hier als Gleichungsnebenbedingung behandelt werden, da eine größere Menge von Gütern einen größeren Nutzen hat und somit das maximal zulässige Budget verwendet werden muß, um u zu maximieren. (Mathematisch gesprochen: u ist streng monoton wachsend in beiden Komponenten.) Weiterhin kann davon ausgegegangen werden, dass sowohl x, als auch y positiv sind, denn wenn eine Variable Null ist, so ist die Nutzenfunktion auch 0 und somit minimal.

b)
- Lagrangefunktion: $L(x,y,\lambda) = \sqrt{x}\sqrt{y} - \lambda[2x + 3y - 80]$
- Gradient bestimmen $\bigtriangledown L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} - 2\lambda \\ \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - 3\lambda \\ -2x - 3y + 80 \end{pmatrix}$
- Gradient Nullsetzen: $$\begin{array}{rcll} \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} - 2\lambda & = & 0 & \qquad \mathrm{I} \\ \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - 3\lambda & = & 0 & \qquad \mathrm{II} \\ -2x - 3y + 80 & = & 0 & \qquad \mathrm{III} \end{array}$$

Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned}
I &\implies \lambda = \frac{\sqrt{y}}{4\sqrt{x}} \\
\to II &\implies \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - \frac{3\sqrt{y}}{4\sqrt{x}} = 0 \\
&\implies \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} = \frac{3\sqrt{y}}{4\sqrt{x}} \\
&\implies \frac{x}{2} = \frac{3}{4}y \\
&\implies x = \frac{3}{2}y \\
\to III &\implies -2 \cdot \frac{3}{2}y - 3y + 80 = 0 \\
&\implies 6y = 80 \\
&\implies y = \frac{80}{6} = \frac{40}{3} \\
&\implies x = \frac{3}{2}y = \frac{40}{2} = 20
\end{aligned}$$

Test: $x, y \geq 0$, also ist die Lösung wirklich zulässig.
(erreichter Maximalwert: $u(20, \frac{40}{3}) = \sqrt{20} \cdot \sqrt{\frac{40}{3}} \approx 16.33$.)

Antwort: Um die Nutzenfunktion zu maximieren muss die Konsumentin 20 Einheiten von Gut x und $\frac{40}{3} \approx 13.33$ Einheiten von Gut y konsumieren. (Der erreichte Nutzen beträgt dabei 16.33.)

Aufgabe 2

Nehmen Sie an, die Punktezahl, die Sie in einer Mathematikklausur erreichen, lasse sich angeben durch die Funktion $p(x, y) = 0.5xy + 2y$, wobei x die Anzahl der Stunden, die Sie vor der Klausur zum Entspannen nützen und y die Anzahl der Stunden, die Sie zur Vorbereitung auf die Klausur nützen, angeben. Bis zur Klausur haben Sie noch 20 Stunden Zeit.

a) Wie viele Punkte erreichen Sie, wenn Sie die gesamte Zeit vor der Klausur lernen?

b) Wie müssen Sie die verbleibende Zeit auf Erholung und Vorbereitung verteilen, um ein möglichst gutes Klausurergebnis zu erzielen? Stellen Sie hierzu erst das zugehörige Optimierungsproblem auf und finden Sie dann die Lösung mit der Lagrangemethode.

a) Wenn man die gesamte Zeit vor der Klausur lernt wüde, man $p(x, y) = p(0, 20) = 2 \cdot 20 = 40$ Punkte erreichen.

b) Optimierungsproblem: Maximiere die Funktion

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 0.5xy + 2y$$

unter der Nebenbedingung $x + y = 20$ bzw.

$$g(x, y) = x + y - 20 = 0 \qquad (\text{ und } x, y \geq 0).$$

Lagrangefunktion: $L(x,y,\lambda) = 0.5xy + 2y - \lambda[x+y-20]$

Gradient: $\bigtriangledown L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 0.5y - \lambda \\ 0.5x + 2 - \lambda \\ -x - y + 20 \end{pmatrix}$

$$\text{Nullsetzen:}\quad \begin{array}{rcll} 0.5y - \lambda & = & 0 & \quad \text{I} \\ 0.5x + 2 - \lambda & = & 0 & \quad \text{II} \\ -x - y + 20 & = & 0 & \quad \text{III} \end{array}$$

Lösen:

$$\begin{aligned} I &\implies \lambda = 0.5y \\ \to II &\implies 0.5x + 2 - 0.5y = 0 \\ &\implies y = x + 4 \\ \to III &\implies -x + -(x+4) + 20 = 0 \\ &\implies 2x = 16 \\ &\implies x = 8 \\ &\implies y = x + 4 = 12 \end{aligned}$$

Test: $x, y \geq 0$, also ist Lösung wirklich zulässig.
Auswertung von p an der Maximalstelle: $p(8,12) = 4 * 12 + 24 = 72$. Antwort: Um eine maximale Punktzahl von 72 Punkten zu erreichen müsste man 8 Stunden zum Entspannen und die restlichen 12 Stunden zum Lernen verwenden.

Aufgabe 3

Ein Unternehmen stellt aus zwei Inputfaktoren x und y, welche 5 bzw. 10 Geldeinheiten kosten, ein Gut gemäß der Produktionsfunktion $x^{0.5}y^{0.5}$ her. Für einen Auftrag muss es 20 Einheiten des Gutes produzieren und möchte nun diejenige Kombination der Inputfaktoren finden, die die Kosten dieses Auftrags minimieren.
Stellen Sie das zugehörige Optimierungsproblem auf und finden Sie das Optimum mit dem Verfahren von Lagrange.

- Optimierungsproblem: Minimiere

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto 5x + 10y$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = \sqrt{x}\sqrt{y} - 20 = 0.$$

- Lagrangefunktion: $L(x,y,\lambda) = 5x + 10y - \lambda[\sqrt{x}\sqrt{y} - 20]$

- Gradient bestimmen: $\bigtriangledown L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 5 - \frac{\lambda\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \\ 10 - \frac{\lambda\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} \\ -\sqrt{xy} + 20 \end{pmatrix}$

- Gradient Nullsetzen: $\begin{array}{rclc} 5 - \frac{\lambda\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} & = & 0 & \mathrm{I} \\ 10 - \frac{\lambda\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} & = & 0 & \mathrm{II} \\ -\sqrt{xy} + 20 & = & 0 & \mathrm{III} \end{array}$

  Gleichungssystem lösen:

$$
\begin{aligned}
III &\implies \sqrt{xy} = 20 \implies x = \frac{400}{y} \\
\to I &\implies 5 - \frac{\lambda\sqrt{y}}{2\sqrt{\frac{400}{y}}} = 0 \implies 5 - \frac{\lambda y}{40} = 0 \implies 5 = \frac{\lambda y}{40} \implies \lambda = \frac{200}{y} \\
\to II &\implies 10 - \frac{\lambda\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} = 0 \implies 10 = \frac{\frac{200}{y}\sqrt{\frac{400}{y}}}{2\sqrt{y}} = \frac{2000}{y^2} \implies y^2 = 200 \implies y = \sqrt{200} \approx 14.14 \\
&\implies x = \frac{400}{\sqrt{200}} \approx 28.28
\end{aligned}
$$

  Test: $x, y \geq 0$. (Minimale Kosten: $f(28.28, 14.14) = 282.84$.)

  Antwortsatz: Um die Kosten zu minimieren muss das Unternehmen 28.28 Einheiten des Inputfaktors x und 14.14 Einheiten des Inputfaktors y verwenden. (Die minimalen Kosten betragen dann 282.84 Einheiten.)