Aufgabensammlung

zur Mathematikvorlesung für

Nebenfachstudierende

Dr.Dr. Christina Schneider

Blatt 1a

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass für eine Menge A mit $|A| = n$ gilt:
$|\wp(A)| = 2^n$

Aufgabe 2:

Sei $f : D \longrightarrow W$ eine Abbildung mit $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ und $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ sowie

$$f(d_1) = w_2, f(d_2) = w_5, f(d_3) = w_4, f(d_4) = w_3$$

a) Ist die Abbildung f injektiv?

b) Geben Sie $f^{-1}(\{w_1\})$ an.

Aufgabe 3:

$f : D \longrightarrow W$ und $g : W \longrightarrow V$ seien zwei bijektive Abbildungen und f^{-1} und g^{-1} ihre jeweiligen inverse Abbildungen. Ziegen Sie, dass $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ gilt.

Blatt 1

Aufgabe 1: Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion.

1. $$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2 - \frac{1}{2^n}$$

   Konvergiert die entsprechende unendliche Reihe? Wenn ja, wogegen?

2. $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

   Konvergiert die entsprechende unendliche Reihe? Wenn ja, wogegen?

3. $$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

   Konvergiert die entsprechende unendliche Reihe? Wenn ja, wogegen?

Aufgabe 2: Beweisen Sie die Ungleichungen mit Hilfe der vollständigen Induktion.

1. $2^n > n \quad$ für $\quad n \in I\!N$
2. $2^n > n^2 \quad$ für $\quad n \geq 5$
3. $2^n > n^3 \quad$ für $\quad n \geq 10$

Aufgabe 3: A und B seien Mengen, zeigen Sie:

1. $A \cap B = B \cap A$
2. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Aufgabe 4: Sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\{a\}$ eine einelementige Menge.

1. Geben Sie die Potenzmenge $\wp(A)$ an.
2. Geben Sie die Menge $A \cap \emptyset$ an.

3. Geben Sie die Menge $A \cup \emptyset$ an.

Aufgabe 5:

Sei $f : D \longrightarrow W$ eine Abbildung mit $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ und $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ sowie

$$f(d_1) = w_2, f(d_2) = w_5, f(d_3) = w_4, f(d_4) = w_3$$

a) Ist die Abbildung f injektiv?

b) Geben Sie $f^{-1}(\{w_1\})$ an.

Aufgabe 6:

$f : D \longrightarrow W$ und $g : W \longrightarrow V$ seien zwei bijektive Abbildungen und f^{-1} und g^{-1} ihre jeweiligen inverse Abbildungen. Ziegen Sie, dass $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ gilt.

Blatt 2

Aufgabe 1: Der große und der kleine Zeiger einer Uhr starten gemeinsam um 12 Uhr an der gleichen Stelle des Ziffernblattes. Wann hat der große Zeiger den kleinen Zeiger erstmals wieder eingeholt?

Aufgabe 2: Beurteilen Sie folgende Aussagen mit richtig (r) oder falsch (f)! (Im Falle einer *falschen* Aussage : kurze Begründung!)

1. Beschränkte Folgen sind konvergent.
2. Es gibt keine Folge, die arithmetische und geometrische Folge zugleich ist.
3. Die harmonische Folge ist konvergent mit dem Grenzwert 0.
4. Geometrische Folgen sind stets beschränkt, wenn $q > 1$.
5. Eine Folge kann mehrere Grenzwerte haben, aber nicht mehrere Häufungspunkte.
6. Die Folge $(a_k) = 2^k/k^2$ konvergiert gegen 0.
7. Konvergente Folgen sind monoton.
8. Die Folge der Kapitalbeträge, die sich aus der Verzinsung eines bestimmten Anfangskapitals ergibt, ist keine arithmetische Folge.
9. Für arithmetische Folgen gilt: $a_n - a_{n-k} = k \cdot d$ mit $n > k$.
10. Streng monoton fallende Folgen sind stets nach unten beschränkt.
11. Arithmetische Folgen haben für $d < 1$ einen Häufungspunkt oder Grenzwert.
12. Hat eine Folge einen Häufungspunkt, so ist diese Folge beschränkt.
13. Beschränkte Folgen sind monoton.

Aufgabe 3: Frau Reitmeir verfügt zu Beginn des Jahres 2002 auf ihrem Sparkonto über 5.000 EUR Sie beabsichtigt, diesem Betrag von 2002 an am Jahresende jeweils 1.000 EUR hinzuzufügen. Außerdem ist mit der Bank eine jährliche Verzinsung von 5% vereinbart worden.

1. Stellen Sie eine Differenzengleichung für das jeweils am Jahresende vorhandene Kapital K_t auf und klassifizieren Sie die Differenzengleichung.

2. Über wieviel verfügt Frau Reitmeir am Ende des Jahres 2005? Von 2006 an will sie von ihrem Sparkapital 5 Jahre lang jeweils am Jahresende einen festen Betrag R abheben. Stellen Sie eine Differenzengleichung für das verbleibende Restkapital nach der jeweiligen Abhebung auf und ermitteln Sie den jährlich zur Verfügung stehenden Betrag R.

   Hinweis: Nach der letzten Abhebung Ende des Jahres 2010 soll das Kapital aufgebraucht, also $K_t = 0$ sein; der Zinssatz sei weiterhin 5% p.a. Die Frage ist durch Lösen der Differenzengleichung zu beantworten.

Aufgabe 4: Gegeben sei die Differenzengleichung $y_t = ay_{t-1}$, $t > 0$, y_0 gegeben.

1. Klassifizieren Sie die Differenzengleichung.
2. Beweisen Sie die Summenformel $y_t = a^t y_0$

Aufgabe 5: Hans legt am Anfang des Jahres 2002 1000 Euro an. Er beschließt, vom Beginn des Jahres 2003 (!!) an jährlich seinem bislang angesparten Vermögen 100 Euro hinzuzufügen. Mit der Bank wurden 5% Zinsen vereinbart. Wie groß ist Hans' Vermögen nach $k > 2$ Jahren?

Blatt4

Aufgabe 1: Man bestimme die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

1. $f_1(x) = 5x^2 + e^x$
2. $f_2(x) = e^{x^2+1}$
3. $f_3(x) = 5x \cdot \ln(x)$
4. $f_4(x) = \dfrac{(x+1)^2}{1-x^2}$
5. $f_5(x) = x \cdot e^{x^2}$
6. $f_6(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$
7. $f_7(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$
8. $f_8(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Aufgabe 2: Man bestimme die Nullstellen sowie die Maxima und Minima der folgenden Funktionen:

$$f(x) = x^2 - x - 6 \qquad g(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$$

Aufgabe 3:

Geben Sie für die folgenden 6 Funktionen die erste Ableitung in x an:

1. $\ln e^x$
2. $(x+1)^2(x^2-1)^{-2}(x^2-2x+1)$
3. $\frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^{\frac{-1}{3}}}$
4. $\frac{(x^2+4x+4)^{1-\alpha}(x^3+5x^2)}{(x+2)^{-2\alpha}(x+5)}$, $0 < \alpha < 1$
5. $(\cos x)^2 + (\sin x)^2$
6. $\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{(2x-2)(\alpha x^2+2\alpha x+\alpha)}$, $\alpha > 0$

Blatt 5

Aufgabe 1:
Man bestimme die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der folgenden Funktionen:

1. $f_1(x, y) = 6x^2 + 3xy + y$
2. $f_2(x, y) = x^3 + x^2y^2 + y^4 - 6xy$
3. $f_3(x, y) = x^{0.3}y^{0.7}$
4. $f_4(x, y) = \frac{x^2}{y}$

Aufgabe 2:
Gegeben sei die Funktion $f : IR^2 \to IR$,
$f(x, y) = 1 - x^2 + 2ax - 2a^2 - y^2 + 2ay, a \neq 0$.

1) Bestimmen Sie die kritischen Punkte dieser Funktion:

Ergebnis: $(x_0, y_0) =$

2) Liegt ein Extremwert vor?

Antwort:

3) Welcher Art ist ggf. der Extremwert?

Antwort:

Aufgabe 3:
Sind die folgenden Funktionen homogen? Welche Skalenerträge weisen sie in diesem Fall auf?

1. $f(x, y) = 2\sqrt{x} + y$
2. $g(x, y) = 2x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{12}}y^{\frac{1}{4}}$
3. $h(x, y) = 2x + 3y + 1$
4. $i(x, y) = min(2x, y)$

Aufgabe 4:
Bestimmen sie das lokale Extremum der Funktion

$$f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$$

Ist dies ein Minimum oder Maximum?

Aufgabe 5:
Nemen Sie an, die Punktezahl, die Sie in einer Mathematikklausur erreichen, lasse sich angeben durch die Funktion

$$p(x,y) = \frac{1}{2}xy + 2y$$

Dabei bezeichne x die Anzahl der Stunden, die Sie vor der Klausur zum Entspannen nützen und y die Anzahl der Stunden, die Sie zur Vorbereitung der Klausur nützen. Bis zur Klausur haben Sie noch 20 Stunden Zeit.

1. Wieviele Punkte erreichen Sie, wenn Sie die gesamte Zeit vor der Klausur lernen?

2. Wie müssen Sie Erholung und Vorbereitung gewichten, um ein möglichst gutes Klausurergebnis zu erzielen? Wieviele Punkte können Sie dabei maximal erreichen. (Ermitteln Sie die Lösung sowohl mit Hilfe der Substitutionsmethode, als auch mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes sowie mittels der Tangentialmethode.)

Aufgabe 6:
Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f(x,y) = x^\alpha y^\beta + x^\gamma, x > 0, y > 0$$

Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen

Aufgabe 7:
Gegeben sei die auf $\Re_2$ reelle Funktion in zwei Variablen:

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + \frac{2}{3}$$

Ermitteln Sie, ob diese Funktion relative Minima, relative Maxima und Sattelpunkte besitzt. Bestimmen Sie die entsprechenden Extremwerte bzw. Sattelpunkte.

Blatt 5a

Aufgabe 1: Sei $f(x,y) = ax^3 + by$ und $x(t) = \ln t$, $y(t) = e^t$

a) Geben Sie mit
$$\rho(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$
$f \circ \rho$ an.

b) Berechnen Sie das Totale Differenzial von $f \circ \rho$ an der Stelle $t = t_0$.

c) Leiten Sie im Sinne der Differentiation in einer reellen Variable $f \circ \rho$ ab.

Aufgabe 2:
Sei
$$f(x,y) = \begin{pmatrix} ax^2 + by^2 \\ e^{x+y} \end{pmatrix}$$
,
$x(t) = \frac{1}{t}, \quad y(t) = \ln t$ und
$$\rho(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie $f \circ \rho(t)$ an.

b) Berechnen Sie das Totale Differenzial von $f \circ \rho$ bei t_0.

Aufgabe 3:
Ist $f : D \to \mathbb{R}_2$ und I_c und $I_{c'}$ zwei Isolinien zu den Werten $c \in \mathbb{R}$ bzw. $c' \in \mathbb{R}$, $c \neq c'$, dann gilt $I_c \cap I_{c'} = \emptyset$.

Blatt 6

Aufgabe 1:
Ein EDV-Hersteller produziert zwei Typen von Druckern. Die Gesamtkostenfunktion sei

$$K(x,y) = 2x^2 + 4y^2 + 2xy + 10$$

wobei x die Menge der produzierten Drucker des Typs X sei und y die des Typs Y. Sie wollen nun 16 Drucker (egal welchen Typs) zu möglichst niedrigen Kosten produzieren. Wieviele Drucker vom Typ X und wieviel vom Typ Y stellen Sie her.
Bestimmen Sie die Lösung sowohl mit Hilfe der Substitutions- als auch mit Hilfe der Lagrangemethode sowie der Tangentialmethode.

Aufgabe 2:
Ein bestimmtes Glas können Sie aus x Mengeneinheiten Kalk, der pro Mengeneinheit 2 Geldeinheiten kostet und y Mengeneinheiten Sand, der pro Mengeneinheit 3 Geldeinheiten kostet, herstellen. Wieviel Einheiten Kalk bzw. Sand müssen Sie verwenden, um zu möglichst niedrigen Kosten 100 Mengeneinheiten Glas zu produzieren, wenn die folgende Produktionsfunktion gilt

$$g(x,y) = 10\sqrt{xy}$$

Bestimmen Sie die Lösung sowohl mit Hilfe der Substitutions- als auch mit Hilfe der Lagrangemethode sowie der Tangentialmethode.

Aufgabe 3:
Gegeben sie die Produktionsfunktion

$$f(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$$

wobei x die Inputmenge des Gutes 1 und y die Inputmenge des Gutes 2 angibt. Die Kosten für eine Einheit des ersten Gutes betragen 8 Geldeinheiten, die für das zweite Gut 4 Geldeinheiten. Die Fixkosten betragen 10 Geldeinheiten.

1. Um welchen Typ von Produktionsfunktion handelt es sich hier? Ist sie (linear) homogen? Welche Skalenerträge weist sie auf?

2. Stellen Sie Kostenfunktion auf.

3. Es sollen 100 Einheiten zu möglichst niedrigen Kosten produziert werden. Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode von Lagrange die gesuchte Minimalkostenkombination der beiden Inputgüter.

4. Für die Produktion stehe Ihnen ein Budget von 106 Geldeinheiten zur Verfügung. Welche Kombination der Inputgüter muss gewählt werden, um den Output zu maximieren?

Aufgabe 4:
a) Berechnen Sie folgende Integrale

$$\int_0^3 x^2 dx$$

$$\int_0^1 e^x(e^{-x} - 1)dx$$

$$\int_0^3 2x + 1dx$$

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x} + 1dx$$

b) Bestimmen Sie die Stammfunktionen zu folgenden 4 Funktionen:

1. $e^{\ln x}$
2. $\frac{1}{x^2} + 5x^3 + x^4$
3. e^{2x}
4. $\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{(2x-2)(x^2+2x+1)}$.

Aufgabe 5:
Lösen Sie die nachstehende Optimierungsaufgabe unter Nebenbedingungen mit Hilfe der Lagrange-Methode:

Zielfunktion:

$$xy \to max$$

Nebenbedingung:

$$1 - 2(x + y) + 2xy = 0$$

Blatt 7

Aufgabe 1 Berechnen Sie für die Vektoren und Matrizen

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \bar{A} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{B} := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Ergebnisse von

1. $\vec{a}'\vec{b}$, $\vec{b}'\vec{a}$ sowie $\vec{a}\vec{b}'$.
2. $\bar{A}\vec{b}$ sowie $\vec{a}'\bar{B}$
3. $\bar{A}\bar{B}$ sowie $\bar{B}\bar{A}$
4. Sei $\overline{E}$ die $n \times n$ Einheitsmatrix und $\overline{A}$ eine beliebige $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass $\overline{EA} = \overline{AE} = \overline{A}$.
5. Zeigen Sie, dass für Einheitsmatrizen $\overline{E}$ gilt: $\overline{E}^{-1} = \overline{E}$.

Aufgabe 2 Ein Unternehmen produziert drei Produkte A, B und C in drei Arbeitsgängen I, II und III. Ihnen sind dabei die folgenden Informationen bekannt:

Produkt	A	B	C
Verkaufspreis	25	15	25

Arbeitsgänge	I	II	III
Kosten pro Minute	0,2	0,5	0,4

Der Arbeitsaufwand in Minuten ist in Abhängigkeit von den Teilschritten und den Produkten in der folgenden Tabelle dargestellt:

	I	II	III
A	10	15	30
B	8	20	5
C	20	30	5

Der Produktionsplan für die Monate März und April lautet:

Monat	A	B	C
Mäarz	10	20	20
April	20	20	30

1. Wie hoch sind die Kosten für die Erstellung eines jeden Guts? (Hinweis: Sie müssen hierzu die Matrix des Arbeitsaufwands “geeignetmit dem Vektor der minütlichen Kosten der Arbeitsschritte multiplizieren.)

2. Wie hoch ist der Zeitaufwand für die einzelnen Arbeitsschritte in beiden Monaten? (Auch hierzu müssen Sie die Matrizen geeignet multiplizieren.)

3. Wie hoch sind die Erlöse sowie die Kosten in diesen beiden Monaten? Wie hoch ist der Gewinn?

Aufgabe 3:

$$\bar{A} := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \bar{B} := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen $\bar{A}$ und $\bar{B}$.

2. Berechnen Sie die Inverse $\bar{A}^{-1}$ der Matrix $\bar{A}$.

3. Berechnen Sie die Determinante von $\bar{A}^{-1}$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem der ersten Teilaufgabe.

Aufgabe 4:

Im reellen Vektorraum $I\!R_2$ bilden die Vektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$ eine Basis. Zeigen Sie, dass auch die Vektoren $(1, 0)$ und $(0, 5)$ eine Basis für diesen Vektorraum bilden.

Aufgabe 5:

Gegeben seien die 3×4-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Geben Sie *alle* Basen des $I\!R^3$ an, die aus den vier Spalten dieser Matrix gebildet werden können:

Aufgabe 6: Wie verhält sich $\langle \overrightarrow{A}\vec{x}, \overrightarrow{A}\vec{x} \rangle$, wenn $\overrightarrow{A}$ eine Orthogonalmatrix ist?

Aufgabe 7:

Gegeben sei die 3×3-Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie die Matrix auf Definitheit.

Aufgabe 8:

a) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ symmetrisch ist, d.h. es gilt:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$$

b) Zeigen Sie, dass für das Skalarprodukt gilt:

$$\langle \vec{x} + \vec{z}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle$$

Blatt 7a

Aufgabe 1:

1. Zeigen Sie ,dass das Skalarprodukt symmetrisch in $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist ($\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$).

2. Zeigen Sie,dass
$$\langle \vec{0}, \vec{y} \rangle = 0$$
für alle $\vec{y} \in \mathbb{R}_n$ ist.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie,dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \vec{y} \rangle : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$$
$$\vec{x} \mapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

linear ist für jedes “feste”$\vec{y} \in \mathbb{R}_n$

Aufgabe 3:
Zeigen Sie,dass gilt

1. $\|\vec{x}\| = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$
2. $\|\vec{x}\| \geq 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}_n$

Aufgabe 4:
Zeigen Sie für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}_n$

$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{y} - \vec{x}\|$

Mathematikklausur, SS 01

Name:

Matrikelnr.:

Aufgabe 3: [20 Punkte]
In einem Sportverein werden vier Sportarten betrieben. Die Mitglieder unterteilen sich in “Erwachsene”, “Jugendliche” und “Kinder”. Zum 01.01.01 teilten sich die Mitglieder wie folgt auf:

	Erwachsene	Jugend	Kinder
Sport 1	100	10	5
Sport 2	25	20	15
Sport 3	100	5	2
Sport 4	50	10	6

Wie hoch sind die Kosten pro Sportart, die von den Mitgliedern verursacht werden? Die Kosten sind vom Alter der Mitglieder, jedoch nicht von der Sportart abhängig. Die Kosten pro Mitglied finden Sie in der nachstehenden Tabelle.

	Erwachsene	Jugend	Kinder
Kosten	50	40	10

Mathematikklausur, SS 03

Name:

Matrikelnr.:

Aufgabe 2: [20 Punkte]
Lösen Sie die nachstehende Optimierungsaufgabe unter Nebenbedingungen mit Hilfe der Substitutionsmethode:

Zielfunktion:

$$\frac{1}{2}xy \to \max$$

Nebenbedingung:

$$2(\frac{x^2}{4} + y^2) + x - c = 0$$

Hinweis: c bezeichnet hierbei eine beliebige positive reelle Konstante.

Mathematikklausur, WS 03/04

Name:

Matrikelnr.:

Aufgabe 3: [20 Punkte]

Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}_2$ bilden die Vektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$ eine Basis. Zeigen Sie, dass auch die Vektoren $(1, 0)$ und $(0, 5)$ eine Basis für diesen Vektorraum bilden.

Mathematikklausur, WS 03/04

Name:

Matrikelnr.:

Aufgabe 2: [20 Punkte]

Hans legt am Anfang des Jahres 2002 1000 Euro an. Er beschließt, vom Beginn des Jahres 2003 (!!) an jährlich seinem bislang angesparten Vermögen 100 Euro hinzuzufügen. Mit der Bank wurden 5% Zinsen vereinbart. Wie groß ist Hans' Vermögen nach $k > 2$ Jahren?

Mathematikklausur, WS 03/04

Name:

Matrikelnr.:

Aufgabe 1: [20 Punkte]

a) Geben Sie für die folgenden 6 Funktionen die erste Ableitung in x an:

1. $\ln e^x$
2. $(x + 1)^2(x^2 - 1)^{-2}(x^2 - 2x + 1)$
3. $\frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^{\frac{-1}{3}}}$

4. $\frac{(x^2+4x+4)^{1-\alpha}(x^3+5x^2)}{(x+2)^{-2\alpha}(x+5)}$, $0 < \alpha < 1$

5. $(\cos x)^2 + (\sin x)^2$

6. $\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{(2x-2)(\alpha x^2+2\alpha x+\alpha)}$, $\alpha > 0$

b) Bestimmen Sie die Stammfunktionen zu folgenden 4 Funktionen:

1. $e^{\ln x}$

2. $\frac{1}{x^2} + 5x^3 + x^4$

3. e^{2x}

4. $\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{(2x-2)(x^2+2x+1)}$.

Mathematikklausur, WS 04/05, APO

Name:

Matrikelnr.:

Aufgabe 3: [20 Punkte]
Gegeben sei eine Funktion P in zwei Variablen $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$:

$$P(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$$

a) Ist diese Funktion homogen. Wenn ja, von welchem Grad?

b) Optimieren Sie diese Funktion unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 = 2$$

1. unter Verwendung der Substitutionsmethode und

2. unter Verwendung der Lagrange-Methode.