Wiederholungsaufgaben, Teil 2

(In der Übung vom 27.11.13 wurde bereits ein erstes Wiederholungsblatt besprochen)

Aufgabe 1

Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 12 & 7 \\ 1 & 10 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Lässt sich das Produkt $\mathbf{AB}$ der beiden Matrizen berechnen? Begründen Sie kurz Ihre Aussage und berechnen Sie dieses falls möglich.

b) Bestimmen Sie $t \in \mathbb{R}$ so, dass das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12t \\ 12t+7 \\ 7t+8 \end{pmatrix}$ lösbar ist.

c) Bestimmen Sie $\mathbf{B}'$.

d) Multiplizieren Sie entsprechende Elmentarmatrizen, um die Matrix $\mathbf{B}$ auf obere Dreiecksgestalt zu bringen.

e) Ist die Matrix $\mathbf{B}$ regulär?

f) Sind die Spaltenvektoren der Matrix $\mathbf{B}$ linear unabhängig? Kann man daraus schließen, dass die Spaltenvektoren von $\mathbf{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aufspannen? Begründen Sie kurz Ihre Aussage.

g) Berechnen Sie die Inverse der Matrix C.

h) Berechnen Sie die Determinante der Matrix D.

Aufgabe 2

Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x - 2y + z \end{pmatrix}.$$

Als Basis des $\mathbb{R}^3$ soll die Standardbasis verwendet werden und die Basis des Zielraums sei durch die Basisvektoren $\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschrieben.
Bestimmen Sie die entsprechende Matrixdarstellung von f.