

Zu Aufgabe 26 b):

Überprüfung der dritten Eigenschaft einer Metrik (Dreiecksungleichung):

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Hier:

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \max\{|x_1 - z_1|, 2|x_2 - z_2|\} \\ &\stackrel{\text{Nulltrick}}{=} \max\{|x_1 - y_1 + y_1 - z_1|, 2|x_2 - y_2 + y_2 - z_2|\} \\ &\stackrel{\text{Betrachte Zahlenbeispiele}}{\leq} \max\{|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|, 2|x_2 - y_2| + 2|y_2 - z_2|\} \\ &\leq \max\{|x_1 - y_1|, 2|x_2 - y_2|\} + \max\{|y_1 - z_1|, 2|y_2 - z_2|\} \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Die vorletzte Umformung gilt, da im roten Term die Maxima der Summanden aus dem blauen Term addiert werden; veranschaulichen Sie sich diese Beziehung anhand von einfachen Zahlenbeispielen oder betrachten Sie den Beweis der Beziehung für das vereinfachte Beispiel aus der Übung ($\max\{a_1 + a_2, b\} \leq \max\{a_1, b\} + \max\{a_2, b\}$)