SEMINARARBEIT ZU

„WAHRSCHEINLICHKEIT UND ANDERE UNSICHERHEITSKONZEPTE“

Kohärente Risikomaße

Autor:

Simone Beer

Betreuer:

Professor Dr. Thomas Augustin

Wintersemester 2013/2014

Institut für Statistik

Ludwig-Maximilians-Universität

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Banken sind durch eine Reihe von aufsichtsrechtlichen Bestimmungen dazu verpflichtet, existenzgefährdende Risiken[1] zu erkennen und diese mit Eigenkapital zu unterlegen, um so die eigene Zahlungsfähigkeit zu gewährleisten. Entscheidend für die Bestimmung des adäquaten Kapitalbedarfs ist die Quantifizierung des Risikos durch die Finanzinstitute mittels geeigneter Risikomaße. Die Arbeit 'Coherent Measures of Risk' von Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber und David Heath (1999) erörtert vier wünschenswerte Eigenschaften, welche Risikomaße aufweisen sollten. Risikokennzahlen, die diese Eigenschaften erfüllen, werden als 'kohärent' bezeichnet.

Nicht alle Risikomaße sind gleichermaßen geeignet, um Kapitalanforderungen zu bestimmen. Die Theorie der kohärenten Risikomaße beschreibt daher Eigenschaften, welche Risikokennzahlen aufweisen müssen, um erstrebenswert zu sein und zeigt auf, welche Kennzahlen diese Axiome erfüllen (CAS, Kapitel 9, S. 1-4).

Ein weiterer zentraler Fokus der vorliegenden Arbeit besteht in der Beschreibung von Risiko mit nicht klassischen Wahrscheinlichkeiten. Allen voran sei hier die Theorie der 'imprecise probability' und die damit verbundenen Konzepte zu nennen. Innerhalb der letzten zwei Jahrzehnte gewann diese Theorie vor allem durch die Arbeiten von Walley und Weichselberger große Bedeutung. Dabei prägte Walley den Begriff der 'imprecise probability', während Weichselberger den Ausdruck Intervallwahrscheinlichkeiten verwendet. Im Rahmen dieser Arbeit liegt der Fokus auf Walley's Theorie, welche durch die Verwendung von Kauf- und Verkaufspreise für Lotterien respektive Wetten eine Erweiterung der klassischen Theorie der subjektiven Wahrscheinlichkeiten darstellt. Es kann gezeigt werden, dass ein Risikomaß ein Spezialfall von 'upper prevision' ist. An dieser Stelle sei nur erwähnt, dass im Gegensatz dazu der Ansatz von Weichselberger die Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogorov verallgemeinert, ohne jedoch eine Auslegung zu erzwingen.

Die Arbeit gliedert sich somit wie folgt: zunächst wird das Konzept der kohärenten Risikomaße in den übergeordneten Kontext des Seminars 'Wahrscheinlichkeiten und andere Unsicherheitskonzepte' eingeordnet. Im nächsten Schritt folgt die Definition von Risiko und Risikomaßen vor dem Hintergrund verschiedener Betrachtungsebenen sowie die Einbettung in das Konzept der 'imprecise previsions'. Es kann gezeigt werden, dass ein kohärentes Risikomaß, definiert auf einer beliebigen Menge von Risiken, als ein Spezialfall von kohärenter 'upper prevision' gesehen werden kann. Die Grundlage hierfür bildet die Interpretation von Risiko als Wette. Darauf aufbauend werden die Definitionen von Konsistenz und Kohärenz für 'imprecise previsions' eingeführt und auf Risikomaße übertragen. Die anschließende Betrachtung von Risikomaßen im linearen Raum dient als Grundlage für die Herleitung der vier Axiome von Artzner et al., die ein Risikomaß erfüllen muss,

[1] Existenzgefährdende Risiken umfassen drei Risikoarten: operatives Risiko, Marktrisiko sowie Kreditrisiko. Das operative Risiko resultiert aus Defiziten in den Informationssystemen oder dem internen Kontrollwesen, wie menschliche Fehler, EDV-Systemabbrüche und Mängel in der Aufbau- und Ablauforganisation. Marktrisiko bezeichnet das Risiko finanzieller Verluste durch Änderung der Marktpreise von Aktien, Wechselkursen oder Rohstoffen. Die bedeutendste Risikoart für Kreditinstitute, auf welche sich vorliegende Arbeit fokussiert, ist das Kreditrisiko: die Gefahr, dass ein Kreditnehmer die ihm gewährten Kredite nicht oder nicht vollständig zurückzahlen kann.

sodass es als kohärent angesehen werden kann. Ferner werden zwei Verfahren diskutiert, um nicht kohärente Risikomaße in kohärente zu transformieren. Abschließend wird die Übertragung der Kohärenz-Axiome in die Praxis erörtert sowie eine Überprüfung der Kohärenz einiger Risikomaße vorgenommen.

2 Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des Seminars 'Wahrscheinlichkeit und andere Unsicherheitskonzepte' des Instituts für Statistik der Ludwig-Maximilians-Universität München. Wie der Titel bereits suggeriert, lag der Fokus primär auf einer kritischen Diskussion der herkömmlichen Modellierung von Unsicherheit mit Hilfe von klassischen Wahrscheinlichkeiten. Ferner wurden verschiedene Begriffe von Unsicherheit ausdifferenziert, sowie alternative Konzepte zum Umgang mit Unsicherheit thematisiert.

2.1 Klassische Wahrscheinlichkeit und 'imprecise probability'

Will man den Terminus der kohärenten Risikomaße im Kontext von Wahrscheinlichkeiten betrachten, gilt es in einem ersten Schritt, sich die drei verschiedene Ebenen von Wissen vor Augen zu führen: Determinismus, Unsicherheit und 'imprecision'. Das Verständnis und die Bedeutung dieser drei Konzepte kann mit folgendem Beispiel anschaulich dargestellt werden. Im Finale der Fußballweltmeisterschaft 2012 standen sich Italien und Spanien gegenüber. Nach Ende der regulären Spielzeit konnte aus der Sicht Spaniens der Ausgang der Verlängerung wie folgt lauten: Gewinnen (G), Unentschieden (U) oder Verlieren (V). Es stellt sich nun die Frage, wie die oben genannten drei Konzepte die Ausgänge der Spielverlängerung jeweils auf Basis von Wahrscheinlichkeiten modellieren. Der Determinismus geht von der Annahme aus, dass der spanische Torwart unschlagbar ist. Dies bedeutet, dass Spanien sicher gewinnt und somit die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen möglichen Spielausgänge wie folgt lauten: P(G)=1 und P(U)=P(V)=0. Das Konzept der Unsicherheit hingegen besagt, dass Gewinnen doppelt so wahrscheinlich ist wie Unentschieden, wobei dies wiederum drei mal wahrscheinlicher ist als Verlieren. Somit gilt: P(G)=0.6, P(U)=0.3 und P(V)=0.1. Fall jedoch lediglich die Aussage getroffen werden kann, dass Gewinnen wahrscheinlicher ist als Unentschieden, und letzteres wahrscheinlicher ist als Verlieren, spricht man von 'imprecision'. Es ist somit möglich, eine Einschätzung der Eintrittswahrscheinlichkeiten der möglichen Spielausgänge vorzunehmen auf Basis von folgender Relation: P(G) $>$ P(U) und P(U) $>$ P(V). Allerdings ist eine Zuordnung von konkreten absoluten Wahrscheinlichkeitswerten, wie dies bei den vorherigen zwei Konzepten der Fall war, nicht möglich. Geht man davon aus, dass $\exists\ \alpha$, β, γ, sodass $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und $\gamma > 0$, mit $\alpha+\beta+\gamma=1$ gilt, ist eine 'wahrscheinlichkeitsbasierte' Einschätzung von Gewinnen, Unentschieden und Verlieren lediglich mit Hilfe eben genannter Parameter möglich und lässt sich wie folgt definieren: P(G)=$\frac{\alpha}{2}+\beta+\frac{\gamma}{2}$, P(U)=$\frac{\alpha}{3}+\frac{\gamma}{2}$ und P(V)=$\frac{\alpha}{3}$. In einem nächsten Schritt werden die drei Konzepte nun auf einer allgemeineren Ebene beschrieben. Während sich der Determinismus durch die boolsche

Aussagelogik charakterisieren lässt, wird das Konzept der Unsicherheit in die Bayesianische Wahrscheinlichkeitstheorie und der Terminus 'imprecision' in Walley's Theorie der kohärenten 'lower previsions' eingeordnet. Die beiden letzteren Ausdrücke sind durch eine Begrenztheit der Verfügbarkeit von Information im Sinne von fehlerhafter bzw. unvollständiger Beobachtungen gekennzeichnet und grenzen sich somit klar vom Determinismus ab (Antonucci, 2012).

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit kann ferner durch die zwei Konzepte 'Zufälligkeit' und 'Partielles Wissen' beschrieben werden. Das Konzept der Zufälligkeit ist in erster Linie zurückzuführen auf De Moivre und Kolmogorov und besagt, dass Schwankungen durch wiederholte Beobachtungen erfasst werden. Im Fokus von Bayes' und De Finetti's Konzept des Partiellen Wissen hingegen spielt unvollständige und fehlerhafte Information die zentrale Rolle. Einen Überblick über die jeweiligen Kernpunkte beider Ansätze liefert nachfolgende Tabelle:

Zufälligkeit	**Partielles Wissen**
Chancen	Glaube
Allgemeingültigkeit	Individuumsfokussierung
Aleatorisch oder objektiv	Epistemisch oder subjektiv
Frequentistisch	Bayesianisch
Begrenzte Häufigkeiten	(Wett-)Verhalten

Die Quantifizierung von Unsicherheit erfolgt in den meisten Fällen über die Verwendung von klassischen präzisen Wahrscheinlichkeiten ('precise probability'): jedem Ereignis A wird eine präzise Wahrscheinlichkeit P(A) zugewiesen. Allerdings ist hinlänglich bekannt, dass dieser Ansatz mit gravierenden Einschränkungen verbunden ist. Er setzt ein sehr exaktes Wissen über die Information eines Ereignisses voraus und kann somit als zu restriktiv angesehen werden, um das multidimensionale Konzept von Unsicherheit vollständig zu erfassen. Allen voran ist durch die Verwendung einer einzelnen Wahrscheinlichkeit die Darstellung der Qualität des zugrunde liegenden Wissens nicht ausreichend gewährleistet. Eine Möglichkeit, um diesen Nachteil zu beheben, ist durch die Verwendung von 'lower und upper probabilities', $\underline{P}(\mathrm{A})$ und $\overline{P}(\mathrm{A})$ mit $0 \leq \underline{P}(\mathrm{A}) \leq \overline{P}(\mathrm{A}) \leq 1$, bzw. allgemeiner, mit 'lower und upper previsions' gegeben. Falls $\underline{P}(\mathrm{A})=\overline{P}(\mathrm{A})$ für alle Ereignisse A gilt, liegt eine präzise Wahrscheinlichkeit vor. Hingegen gilt im Fall von $\underline{P}(\mathrm{A})=0$ und $\overline{P}(\mathrm{A})=1$ das völlige Nichtwissen über das Ereignis A. Der Ausdruck 'imprecise probability' bzw. die adäquatere Bezeichnung 'lower und upper probability' ermöglicht somit eine weitaus präzisere Messung von Unsicherheit als präzise Wahrscheinlichkeiten ('precise probabilities') (Coolen et al., 2010, S. 1).

2.2 Subjektive Wahrscheinlichkeit und Wettinterpretation

Im weiteren Verlauf dieses Absatzes liegt der Schwerpunkt auf dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff, welcher durch folgende Annahmen beschrieben werden kann. Subjektive Wahrscheinlichkeit modelliert (partielles) Wissen eines Individuums über einen Sachverhalt oder Umweltzustand. Da dabei das jeweilige Individuum im Zentrum steht, können zwei Personen zu unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitseinschätzungen kommen. Hierbei stellt sich allerdings die Frage, wie diesen Wissen quantitativ gemessen werden kann. Eine Antwort darauf liefert die Betrachtung des Wettverhaltens eines Subjekts, sprich ihre subjektive Wettbereitschaft für eine Lotterie. Wahrscheinlichkeiten werden somit interpretiert als derjenige Preis, zu dem eine Lotterie ge- oder verkauft wird. Es gilt daher folgender Zusammenhang:

Interpretation der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mittels Wettverhalten

$\Leftrightarrow$

Maximaler Wetteinsatz für ein Ereignis A ist P(A)

Das Wettverhalten wird, wie bereits erwähnt, über eine Lotterie betrachtet, die wie folgt definiert ist:

Definition 1. *Lotterie* Eine Lotterie ist eine beschränkte reellwertige Variable auf $\mathcal{X}$, $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. Die Menge aller Lotterien wird bezeichnet mit $\mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Eine komprimierte Einführung in die Theorie der subjektiven Wahrscheinlichkeiten und deren Wettinterpretation liefert auf anschauliche Weise nachfolgendes Beispiel. Betrachtet wird die kommenden Fußball-Weltmeisterschaft, dessen Sieger noch unbekannt ist. Die möglichen Ergebnisse lauten dabei:

$$a = Griechenland,\ b = Spanien,\ c = Deutschland,\ d = anderes\ Land$$

$$\Rightarrow\ \mathcal{X} = \{a, b, c, d\}$$

Ferner ist die Lotterie

$$f(a) = 3,\ f(b) = -2,\ f(c) = 5,\ f(d) = 10$$

gegeben. Die Annahme bzw. Ablehnung der Lotterie ist abhängig von der subjektiven Wahrscheinlichkeitseinschätzung der einzelnen Ergebnisse durch das jeweilige Individuum.

Widmet man sich nun wieder dem allgemeinen Fall und betrachtet eine Lotterie f auf $\mathcal{X}$. Für diese Lotterie wird nun dasjenige Supremum des Einsatz μ festgesetzt, sodass die Entlohnung f-μ, dargestellt als die Erwartung E(f), erstrebenswert ist. Es folgt, dass

- für jedes $\mu <$ E(f) gilt: Man erwartet einen Gewinn.
- für jedes $\mu >$ E(f) gilt: Man erwartet einen Verlust.

Überträgt man in einem nächsten Schritt obige zwei Feststellungen auf das Konzept der Wettinterpretation unter Verwendung der Begriffe Kauf- und Verkaufspreise, gilt:

- Falls ein Individuum bereit ist, für den Gewinn einer Lotterie f den Betrag x zu zahlen, ist die Lotterie genau dann erstrebenswert, falls f-x > 0.
- Falls ein Individuum bereit ist, die Lotterie f zu einem Preis von x zu verkaufen, ist die Lotterie genau dann erstrebenswert, falls x-f > 0.

Liegen klassische Wahrscheinlichkeiten vor, lässt sich feststellen, dass das Supremum des Kaufpreises für die Lotterie f mit dem Infimum des Verkaufspreises derselben Lotterie f übereinstimmt. Somit ist ein fairer Preis für die Lotterie f gegeben (Miranda, 2007, S. 6-8).

2.3 Andere Unsicherheitskonzepte und Wettinterpretation

Im Fall von Unschlüssigkeit ist die Arbeit mit dem klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff jedoch nicht mehr möglich, sodass ein Übergang auf das Konzept der 'lower und upper previsions' erfolgt. Ferner gilt bei Existenz von fehlenden oder unzureichenden Informationen über einen Sachverhalt, dass ein fairer Preis P(f) für die Lotterie f nicht mehr sinnvoll ist. Ein weitaus adäquaterer Ansatz ist die Festsetzung von verschiedenen Werten, wobei $\underline{P}$(f)< $\overline{P}$(f), anstatt exakter (und womöglich falscher) Wahrscheinlichkeiten. Diese sind definiert als

- 'lower prevision' einer Lotterie f, $\underline{P}$, welches das Supremum des akzeptablen Kaufpreises für f darstellt;
- 'upper prevision' einer Lotterie f, $\overline{P}$, welches das Infimum des akzeptablen Verkaufspreises für f darstellt.

Betrachtet man erneut obiges Beispiel der Fußball-Weltmeisterschaft mit gegebener Lotterie

$$f(a) = 3\ (Griechenland),\ f(b) = -2\ (Spanien),\ f(c) = 5\ (Deutschland),\ f(d) = 10$$

gilt:

- Falls sich das Individuum sicher ist, dass Spanien nicht gewinnt, sollte es die Lotterie akzeptieren und maximal 3 Geldeinheiten dafür bezahlen, sodass $\underline{P}$(f)$\geq$3.
- Falls sich das Individuum sicher ist, dass Spanien oder Griechenland gewinnt, sollte es die Lotterie zum Preis von größer 3 Geldeinheiten verkaufen, sodass $\overline{P}$(f)$\leq$3.

Sei nun eine Lotterie I_A gegeben, welche 1 Geldeinheit auszahlt, falls A eintritt und 0 Geldeinheiten falls nicht. Die 'lower prevision' $\underline{P}(I_A)$ kann folglich gesehen werden als das Supremum der Wettquote auf A, als ein Maß für die Befürwortung von A oder als ein Maß für die Stärke des Glaubens in A. Die 'upper prevision' $\overline{P}(I_A)$ hingegen ist zu sehen als ein Maß gegen die Befürwortung von A bzw. als ein Maß für die Plausibilität in A (Miranda, 2007, S. 11-16).

Die Verbindung dieser Wettinterpretation mit den bereits erwähnten Ansätzen von De Finetti und Walley verdeutlicht folgendes: im Fall von De Finetti's Konzept der 'prevision' gilt, dass der minimale Verkaufspreis mit dem maximalen Kaufpreis übereinstimmt, sodass $\overline{P}$(X) = $\underline{P}$(X). Walley's Ansatz der 'imprecision' besagt hingegen, dass solch eine rationale Behauptung nicht existiert und somit nur gilt, dass $\underline{P}$(X)$\leq$ $\overline{P}$(X). Diese 'imprecise previsions', die auf einer Einschätzung von Wettverhalten basieren, sind aufgrund von beschränkter Rationalität um einiges leichter festzusetzen als 'precise previsions' und reflektieren gleichzeitig das Ausmaß der vorhandenen Information eines Individuums über einen Sachverhalt. Da 'imprecise previsions', wie bereits erwähnt, eine starke Verbindung zu Risikomaßen aufweisen, gewinnt dieses Konzept auch im Bereich Finanzwirtschaft zunehmend an Bedeutung (Antonucci, 2012).

3 Definition eines Risikomaßes und Klassifizierung

3.1 Ökonomische Definition von Risiko

Für die Klassifizierung des Begriffs Risikomaß gilt es in einem ersten Schritt, eine zweckmäßige allgemeine Definition von Risiko festzulegen. Jedoch hat sich sowohl in der Praxis als auch in der wissenschaftlichen Literatur bisher noch keine gänzlich einheitliche Interpretation herausgebildet (Völker, 2001, S. 33). Die Mehrheit der Ansätze können allerdings auf zwei Auffassungen von Risiko zurückgeführt werden: eine ursachenbezogene sowie eine wirkungsbezogene Betrachtungsweise. Unter der Voraussetzung eines unvollständigen Informationsstandes, wird Risiko in der ursachenbezogenen Auffassung verstanden als Unsicherheit über den Eintritt zukünftiger Ereignisse. Den unsicheren Ereignissen können somit subjektive respektive objektive (Eintritts-) Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden (Schulte & Horsch, 2002, S. 14). Die wirkungsbezogene Auffassung interpretiert Risiko als die Gefahr einer negativen Zielverfehlung, da sie die Risikowirkung in den Mittelpunkt der Betrachtung stellt. Solch eine Risikodefinition als lediglich negative Zielverfehlung wird gewöhnlich als Downside-Risiko bezeichnet. Dem gegenüber steht die positive Zielverfehlung: die Chance. Dennoch können beide Betrachtungsweisen nicht als unabhängig voneinander angesehen werden. Die wirkungsbezogene Risikoauffassung setzt die ursachenbezogene voraus (Schulte & Horsch, 2002, S. 14f.)

Im Rahmen der finanzwirtschaftlichen Problemstellung kann obige Betrachtungsweise von Risiko erweitert werden durch folgende Definition: Risiko beschreibt die aus einer Unsicherheit über zukünftige Entwicklungen resultierende Gefahr der negativen Abweichung eines tatsächlich realisierten Wertes einer finanzwirtschaftlichen Zielgröße von seinem jeweiligen Erwartungswert (Oehler & Unser, 2002, S. 21; Kürsten & Straßberger, 2004, S. 203). Solch eine Fokussierung auf ausschließlich negative Divergenzen von einer Referenzgröße wird, wie bereits im vorherigen Absatz erwähnt, als Downside- oder Shortfall-Risiko bezeichnet (Hartmann-Wendels, Pfingsten & Weber, 2000, S. 541).

3.2 Mathematische Definition eines Risikomaßes

Die quantitative Bestimmung von Risiko kann mittels zahlreichen, teils differenzierten Ansätzen erfolgen[2]. Das Risikoverständnis in Absatz 3.1, welches Risiko auffasst als die

[2]Nachfolgende Erläuterungen stützen sich auf Kriele & Wolf, 2012, S. 19-20.

Möglichkeit des Auftretens 'ungünstiger Ereignisse' und positive Abweichungen in der Regel ausgeblendet, setzt einen relativ trivialen und qualitativ-orientierten Ansatz voraus. Ein weitaus stärkerer mathematischer Fokus hingegen ergibt sich durch die Interpretation von Risiko als Schwankungen (zum Beispiel Wertschwankungen), sodass neben 'ungünstigen' auch 'günstige' Abweichungen berücksichtigt werden. Dies ist etwa der Fall, wenn man als Risikomaß die Standardabweichung wählt.

Ein alternativer und im stärkeren Maße anwendungsorientierter Ansatz, der auch im Banken- und Versicherungswesen von großer Bedeutung ist, wird in Kapitel 5 ausführlich behandelt. Vorab erwähnt wird nur der dabei gewählte Fokus: finanzielle Risiken werden als derjenige Geldbetrag gesehen, welcher bei Eintritt des Risikos die Höhe des jeweiligen Verlusts beschreibt. Das gewählte Risikomaß wird somit als Kapitalbetrag interpretiert, den das Unternehmen gemäß seiner Risikoaversion vorhalten muss, um solvent zu bleiben.

Es sei $(\mathbf{\Omega}, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer σ-Algebra $\mathscr{A}$ und Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$. Man bezeichnet mit $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\mathbf{\Omega}, \mathbb{R}^k)$ den Raum der $\mathbb{R}^k$-wertigen Zufallsvariablen

$$X : \mathbf{\Omega} \to \mathbb{R}^k, \qquad \omega \mapsto X(\omega),$$

also der bezüglich $\mathscr{A}$ und der Borelschen σ-Algebra messbaren Abbildungen. Will man die σ-Algebra $\mathscr{A}$ hervorheben, spricht man auch von $\mathscr{A}$-messbaren Abbildungen bzw. von bezüglich $\mathscr{A}$ messbaren Abbildungen.

Definition 2. *Risikomaß* Ein Risikomaß ist eine Abbildung

$$\rho : \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad X \mapsto \rho(X),$$

wobei $\mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R}) \subseteq \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\Omega, \mathbb{R})$ ein (von ρ abhängiger) geeigneter Vektorunterraum ist[3].

3.3 Interpretation von Risiko als Zufallsvariable: zukünftiges Endvermögen

Eine Vielzahl von wissenschaftlichen Aufsätzen, welche sich mit dem Begriff 'Risiko' befassen, definieren diesen als Wertänderung zwischen zwei Zeitpunkten. Dieser Ansatz wurde bereits im Rahmen der vorliegenden Arbeit im vorausgegangenen Absatz aufgegriffen, um so eine erste Bewertung von Risiko vornehmen zu können. Allerdings finden sich in der Literatur auch zahlreiche kritische Stimmen, die eine alternative Begriffsbestimmung für weitaus angemessener erachten. Artzner et al. verwenden in ihrer Arbeit 'Coherent Measures of Risk' ausschließlich zukünftige Wertausprägungen ausgewählter Finanzpositionen. Ihre Begründung für diesen Denkansatz ist recht grundlegend: Risiko steht in eindeutiger Verbindung zu den Schwankungen zukünftiger Werte jener Positionen. Diese Schwankungen resultieren aus sich ändernde Finanzmärkte respektive allgemeiner ausgedrückt, aus unsicheren Ereignissen. Dem nachfolgenden Abschnitt, der sich mit der Wahl eines guten

[3] Die Begrenzung auf einen Teilraum respektive Unterraum ist sinnvoll, da die aus Anwendungssicht relevanten Risikomaße oftmalig nicht auf ganz $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\mathbf{\Omega}, \mathbb{R}^k)$ definiert sind.

Risikomaßes befasst, liegt diese Definition von Risiko zu Grunde. Festzuhalten ist somit, dass der Fokus nun auf Zufallsvariablen liegt, die definiert sind auf einer Menge von Umweltzuständen zu einem zukünftigen Zeitpunkt und interpretiert werden als mögliche zukünftige Werte einer Finanzposition, welches zum jetzigen Zeitpunkt von einem Investor gehalten wird. Ferner ist für die Risikomessung einer Position eine Einschätzung von Nöten, ob sich ihr zukünftiger Wert entweder zu einer Teilmenge von akzeptablen Risiken oder zu einer Teilmenge von nicht akzeptablen Risiken zuordnen lässt. Liegt ein nicht akzeptables Risiko vor, d.h. eine Position mit einem inakzeptablen zukünftigen Wert, kann der Halter dieser Position die ursprüngliche Risikoeinschätzung ändern, indem er in ein zusätzliches Finanzinstrument investiert. Somit wird der zukünftige Wert seiner bereits gehaltenen Position akzeptabel. Die Höhe der Kosten für die Beschaffung eines solchen Finanzinstruments stellt laut Artzner et al. ein gutes Maß für die Messung des Risikos einer ursprünglich nicht akzeptablen Position dar (Artzner et al., 1999, S. 205).

Ein Risikomaß ordnet somit einer Zufallsvariable X, deren zukünftigen Ausprägungen risikobehaftet (unsicher) sind, eine reelle Zahl ρ(X) zu. Risikobehaftet ist assoziiert mit einem möglichen finanziellen Verlust. Diese Größe ρ(X) bewertet das Risikogehalt einer Position X und dient gleichzeitig als Grundlage für die Entscheidungsfindung in Bezug auf X. Zur Konkretisierung dient folgendes Beispiel: sei X der Wert der Aktien am Ende der Woche, welche von einem Investor gehalten werden. Das Risikomaß ρ(X) verkörpert folglich die Höhe der Rücklagen, um etwaige künftige Wertverluste kompensieren zu können und so weiterhin solvent zu bleiben (Pelessoni & Vicig, 2003, S. 393).

3.3.1 Axiome auf Akzeptanzmengen

Artzner et al. legen in ihrer Arbeit 'Coherent Measures of Risk' eine Reihe von Axiomen fest, die für Akzeptanzmengen gelten sollen. Eine Akzeptanzmenge ist dabei definiert als eine Menge von akzeptablen zukünftigen Endvermögen. Die Intuition dieser Axiome ist bei einigen unmittelbar erkennbar; die Interpretation von Axiom 3 jedoch sollte im Kontext von Risikomaßen, unter Berücksichtigung der Eigenschaft der Subadditivität aus Kapitel 3.3, erfolgen. Vorab sei erwähnt, dass Axiome 1 und 2 den nachfolgenden zwei zentralen Aussagen entsprechen:

(i) Es ist vernünftig, alle Investitionsmöglichkeiten zu akzeptieren, die in keinem Umweltzustand zu einem Verlust führen.
(ii) Es ist vernünftig, alle Investitionsmöglichkeiten abzulehnen, die in jedem Umweltzustand zu einem Verlust führen.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird folgende Notation verwendet:
(a) Die Menge aller möglichen Umweltzustände ist beschränkt und wird bezeichnet mit Ω. Betrachtet man Ω als die Ereignismenge eines Experiments, kann das Endvermögen einer Position für jedes Element von Ω berechnet werden. Dabei ist das Endvermögen in jedem möglichen Umweltzustand eine Zufallsvariable, welche mit X bezeichnet wird.

(b) Die Menge aller Risiken wird bezeichnet mit $\mathcal{G}$ und ist die Menge aller reellwertigen Funktionen auf der Menge Ω. Dabei ist der Kegel der nicht-negativen Elemente in $\mathcal{G}$ beschrieben durch L_+, der Kegel der negativen Elemente durch L_-; die Definierbarkeit auf einem Kegel wird vorausgesetzt.
(c) Die Menge aller möglichen Endvermögen, welche als akzeptabel angesehen werden (Akzeptanzmenge), wird bezeichnet mit $\mathcal{A}$.

Ehe die Axiome aufgeführt werden können, ist es von Nöten, folgende grundlegende Annahme zu treffen. Es wird angenommen, dass sowohl die Menge aller möglichen Umweltzustände als auch die einzelnen Wertausprägungen des Endvermögens X bekannt ist, wobei die jeweiligen zugehörigen exakten Eintrittswahrscheinlichkeiten nicht notwendigerweise als bekannt vorausgesetzt werden müssen.

Die Axiome von Artzner et al. für Akzeptanzmengen lauten demnach wie folgt:

- **Axiom 1** Die Akzeptanzmenge $\mathcal{A}$ beinhaltet die Menge L_+.
- **Axiom 2** Die Akzeptanzmenge $\mathcal{A}$ kreuzt nicht die Menge L_{--}, wobei L_{--} definiert ist als
$$L_{--} = \{X \mid \forall \omega \in \Omega, X(\omega) < 0\}.$$
- **Axiom 2'** Axiom 2' stellt ein stärkere Variante des Axioms 2 dar, indem es auch solche Investitionsmöglichkeiten ablehnt, die in keinem möglichen Umweltzustand einen positiven Ertrag generieren.
Es definiert sich wie folgt:
Die Akzeptanzmenge $\mathcal{A}$ erfüllt die Bedingung $\mathcal{A} \cap L_- = \{0\}$.
- **Axiom 3** Axiom 3 besagt, dass die Akzeptanzmenge $\mathcal{A}$ konvex ist und reflektiert somit die Risikoaversion des Halters einer Position.

Das nun folgende letzte Axiom stellt für sich gesehen kein eigenständiges Axiom dar, da die darin getroffene Annahme aus Axiom 3 resultiert. Vielmehr ist es als eine zusätzliche Feststellung, jedoch nicht als notwendigerweise verbindliches weiteres Axiom zu sehen.

- **Axiom 4** Die Akzeptanzmenge $\mathcal{A}$ ist ein positiv homogener Kegel. Allerdings ist dieses Axiom eine nicht auf den ersten Blick erkennbare Forderung an die Menge von akzeptablen zukünftigen Vermögen (Artzner et al., 1999, S. 206-207).

3.3.2 Übereinstimmung zwischen Akzeptanzmengen und Risikomaßen

Ehe die Erläuterung der Axiome nach Artzner et al. erfolgt, wird in einem ersten Schritt der Terminus Risikomaß, so wie er im Kontext eben genannter Autoren verwendet wird, definiert. Die Menge der akzeptablen zukünftigen Endvermögen bildet die Grundlage, um Risiko klassifizieren zu können. Ausgehend von einem Referenzinstrument wird ein Risikomaß dadurch beschrieben, ob und wie viel in dieses Instrument investiert werden muss, sodass eine unter Umständen zu anfangs nicht akzeptable Finanzposition, dargestellt durch sein zukünftiges Endvermögen, für einen Investor akzeptabel wird.

Definition 3. *Risikomaß* Ein Risikomaß ist eine Abbildung aus $\mathcal{G}$ in $\mathbb{R}$.

Im folgenden wird die Definition eines Risikomaßes nach Artzner et al. aufgegriffen, welche in einem klaren Zusammenhang steht zur oben bereits erläuterten Akzeptanzmenge. Es gilt erneut, dass ein Referenzinstrument für jede mögliche von einem Investor gehaltenen Finanzposition am Markt existiert. Die positive Zahl ρ(X), die einem Risiko X mittels dem Risikomaß ρ zugewiesen wird, ist als dasjenige zusätzliche Mindestkapital zu interpretieren, welches ein Investor zu seiner gegenwärtig gehaltenen risikobehafteten Position X hinzufügen muss, sodass die Investition akzeptabel wird. Falls ρ(X) negativ ist, kann dieser Betrag aus der Finanzposition abgezogen werden.

Definition 4. *Risikomaß im Rahmen einer Akzeptanzmenge.* Eine Rendite r eines Referenzinstruments vorausgesetzt, ist das Risikomaß im Rahmen einer Akzeptanzmenge $\mathcal{A}$ die Abbildung aus $\mathcal{G}$ in $\mathbb{R}$ und wird bezeichnet mit $\rho_{\mathcal{A},r}$. Das Risikomaß ist definiert als

$$\rho_{\mathcal{A},r}(X) = inf\{m \mid m \cdot r + X \in \mathcal{A}\},$$

wobei m die zu haltenden Geldmittel sind.

Alternativ ist auch folgende äquivalente Definition möglich, die somit die Übereinstimmung zwischen Akzeptanzmengen und Risikomaßen aufzeigt.

Definition 5. *Akzeptanzmenge im Rahmen eines Risikomaßes.* Die Akzeptanzmenge im Rahmen eines Risikomaßes ρ ist die Menge, welche bezeichnet wird $\mathcal{A}_p$ und definiert ist als

$$\mathcal{A}_p = \{X \in \mathcal{G} \mid \rho(X) \leq 0\}.$$

Für den weiteren Aufbau dieser Arbeit seien folgende Kommentare von Relevanz: ein Risikomaß ρ, welches definiert ist auf $\mathcal{G}$, sollte, wie bereits erwähnt, nach Artzner et al. gewisse Eigenschaften aufweisen. Die aus diesen Eigenschaften resultierenden vier Axiome werden in Abschnitt 3.3 ausführlich behandelt. Ferner wird in Abschnitt 3.3.1 die Übereinstimmung zwischen obigen Axiomen für Akzeptanzmengen und den Axiomen für Risikomaße aus Abschnitt 3.3 verdeutlicht, indem die Axiome für Akzeptanzmengen in Beziehung gesetzt werden zu denen für Risikomaße (Artzner et al., 1999, S. 207-208).

3.4 Risiko und Wettinterpretation

Im nachfolgenden Abschnitt werden die Voraussetzungen für eine allgemeingültige Definition von Risikomaßen erarbeitet, wobei als Grundlage dafür die Interpretation von Risiko im Sinne von Wetten verwendet wird.

Betrachtet man die Variable X als reellwertige Zufallszahl, der zum Zeitpunkt T ein konkreter Wert einer bestimmten Position zugewiesen wird, gilt folgendes: Risikomaße bewerten für gewöhnlich zum Zeitpunkt t=0 das Risiko von Positionen aus einer Menge $\mathcal{D}$[4], ausgehend vom zukünftigen (zufälligen) Wert jeder Position X zu einem bestimmten Zeitpunkt T > 0. Im Grunde ist jedes Risikomaß somit eine reelle Zahl, die die Relevanz eines bestimmten Positionswerts zum Zeitpunkt T für ein Individuum beschreibt. Laut Artzner et al. wird X demnach als Risiko[5] beschrieben (Artzner, Delbaen, Eber & Heath, 1999).

Ein Risikomaß ρ ist, gegeben $\mathcal{D}$, im Allgemeinen definiert als eine Abbildung aus $\mathcal{D}$ in $\mathbb{R}$, die jedem $X \in \mathcal{D}$ eine konkrete Zahl, die eine Risikoeinschätzung für X darstellt, zuweist. Betrachtet man nun im Speziellen Risiko aus der Perspektive einer Wette, verkörpert ρ(X) das Infimum desjenigen Betrages, den ein Individuum als Kompensation zum Zeitpunkt t=0 fordert, um zum Zeitpunkt t=1 für das übernommene Risiko X angemessen entschädigt zu werden. Offenkundig ist der positive Zusammenhang zwischen der Risikohöhe von X und ρ(X): ein riskanteres X geht auch mit einem höheren ρ einher. Somit nimmt das Risikomaß ρ(X) selbst einen konkreten Wert an und kann als der Preis für eine Wette angesehen werden, während das Risiko X selbst eine reellwertige Zufallszahl ist und als Wette interpretiert wird.

Eine alternative, jedoch gleichbedeutende Interpretation für ein Risikomaß ergibt sich durch die Betrachtung des Infimum des Verkaufspreises für ein gegebenes Risiko X. Da der Geldbetrag für den Erhalt von X mit demjenigen bei Verkauf von -X übereinstimmt, kann ρ(X) somit, wie bereits erwähnt, auch als Infimum eines Verkaufspreises zum Zeitpunkt t=0 für -X zum Zeitpunkt t=T gesehen werden. Allerdings erfordert dieser Ansatz die Diskontierung der zukünftigen Position X zum Zeitpunkt T, um ihren Barwert (Gegenwartswert) für t=0 zu bestimmen, sodass X ökonomisch gleichbedeutend ist mit ρ(X). Die Notwendigkeit der Diskontierung ist auf den Zeitabstand zurückführen, welcher sich aus der Festsetzung von ρ zum Zeitpunkt t=0 und der anschließenden späteren Bestimmung des tatsächlich realisierten Wertes von X in t=T ergibt. Es bedarf wohl keiner weiteren Erläuterung, um zu behaupten, dass die Auszahlung eines bestimmten Kapitalbetrages heute nicht gleichbedeutend ist mit dem Erhalt einer Summe in gleicher Höhe zu einem beliebigen späteren Zeitpunkt T. Die Diskontierung des künftigen Betrages X erfolgt unter Verwendung eines sogenannten Referenzinstruments[6]. Dieses Instrument erzielt für jede Geldeinheit, die in t=0 investiert wird, eine zum Zeitpunkt t=T sichere Rendite r > 0.

Die Erkenntnisse des vorherigen Absatzes ermöglichen es somit, die Interpretation von ρ(X) im Kontext einer Wettinterpretation von X und den Barwert von X (respektive -X), der sich durch Diskontierung[7] von X unter Verwendung der Rendite r berechnet (d.h. X/r), zueinander in Beziehung zu setzen. Es ist deshalb evident, dass das Risikomaß ρ

[4]Es wird angenommen, dass jedes Risiko in $\mathcal{D}$ beschränkt ist.

[5]Allerdings herrscht, wie bereits in Absatz 1.1 festgestellt, kein allgemeingültiger Konsens darüber, wie der Begriff Risiko in der Finanzwissenschaft konkret zu definieren ist.

[6]Für gewöhnlich wird als Referenzinstrument eine Nullkupon-Anleihe mit Fälligkeit zum Zeitpunkt T herangezogen, die eine Rendite von r=1+i(T) erwirtschaftet. Dabei ist i(T) der risikolose Zinssatz, den man für eine in t=0 investierte Geldeinheit über einen definierten Anlagehorizont [0,T] erhält.

[7]Eine Diskontierung ist nicht nötig, falls r annähernd den Wert 1 annimmt oder der Anlagehorizont einen begrenzten Zeitraum, im Kreditrisikomanagement für gewöhnlich 7 bis 10 Tage, umfasst.

für eine Position X als das Infimum des Verkaufspreises für -X/r aufgefasst werden kann (Pelessoni & Vicig, P., 2003, S. 393-412).

Erstaunlich ist allerdings nun die Tatsache, dass die eben beschriebene Beziehung zwischen Risikomaß und Infimum des Verkaufspreises genau der Wettinterpretation von Walley für die 'upper prevision' $\overline{P}$ von -X/r entspricht (Walley, 1991). Ein Risikomaß scheint demzufolge ein Spezialfall von 'upper prevision' zu sein, sodass folgender Zusammenhang gilt:

$$\rho(X) = \overline{P}(-X/r)$$

Das Vorzeichen von ρ ermöglicht eine Differenzierung der Positionen X in solche mit wünschenswerten und solche mit nicht wünschenswerten Risikoeigenschaften. Ein $\rho < 0$ bedeutet, dass ein Individuum in t=0 bereit ist, einen negativen Betrag anzunehmen, d.h. etwas zu bezahlen, um zum Zeitpunkt T eine positive Auszahlung X zu erhalten. In diesem Fall ist X erstrebenswert. Dagegen besagt ein $\rho > 0$, dass ein Individuum für die Übernahme des Risikos X eine Kompensationszahlung erhalten sollte. Der Fall ρ(X)=0 impliziert ein gerade noch erstrebenswertes Risiko, d.h. X+ϵ weist wünschenswerte Risikoeigenschaft auf für jedes $\epsilon > 0$. Demnach ergeben sich aus der Interpretation eines Risikomaßes ρ als Wette folgende zwei Aussagen (Pelessoni & Vicig, P., 2003, S. 412):

(I) X ist erstrebenswert, falls ρ(X)$\leq$0

(II) X ist nicht erstrebenswert, falls ρ(X)>0.

4 Wahl eines guten Risikomaßes

4.1 Einführung in die Theorie der Konsistenz

Die zentrale Aussage des Absatzes 3.4 lautet wie folgt: ein Risikomaß kann als Spezialfall von 'upper prevision' angesehen werden. Wenngleich sich die vorliegende Arbeit somit primär mit dem Konzept der 'upper previsions' beschäftigt, erfolgt die Einführung in die Theorie der Konsistenz dennoch mittels Verwendung von 'lower previsions'. Dies hat rein praktische Gründe, da das zur Erklärung der Konsistenz herangezogene Beispiel einen guten Erklärungswert für 'lower previsions' liefert. Die dabei getroffenen zentralen Aussagen können dessen ungeachtet dennoch auf 'upper previsions' übertragen werden.

Die Konsistenz von 'lower previsions' ist an zwei Bedingungen geknüpft, welche im Folgenden theoretisch sowie, unter Verwendung des bereits aufgeführten Beispiels zur Fußball-Weltmeisterschaft, praktisch erläutert werden. Es sei erwähnt, dass die Einschätzungen durch eine 'lower prevision' für eine Menge von Lotterien folgende Voraussetzungen für Konsistenz erfüllen muss:

- **Avoiding-Sure-Loss**
  Eine Kombination von Einschätzungen sollte keinen Nettoverlust generieren, unabhängig vom Ergebnis.

- **Kohärenz**
  Das Supremum des Kaufpreises für die Lotterie f sollte unabhängig von den Einschätzungen für andere Lotterien sein.

Widmet man sich zunächst dem Konzept von 'Avoiding-Sure-Loss', kann dieses auf recht anschauliche Weise verdeutlicht werden, in dem man sich nachfolgendes Beispiel vergegenwärtigt. Sei die subjektive Einschätzung der möglichen Gewinner der Fußball-Weltmeisterschaft gegeben durch

$$\overline{P}(a) = 0.55,\ \overline{P}(b) = 0.25,\ \overline{P}(c) = 0.4,\ \overline{P}(d) = 0.1$$

$$\underline{P}(a) = 0.45,\ \underline{P}(b) = 0.2,\ \underline{P}(c) = 0.35,\ \underline{P}(d) = 0.05$$

mit {a, b, c, d}={Griechenland, Spanien, Deutschland, sonstige}.
Folglich sind die Lotterien I_a-0.44, I_b-0.19, I_c-0.34 und I_d-0.04 erstrebenswert. Aber die Akzeptanz aller Lotterien erzielt die Summe

$$[I_a + I_b + I_c + I_d] - 1.01 = -0.01$$

was zu einem Verlust von 0.01 führt, unabhängig vom Ausgang des Turniers. Die Eigenschaft der 'Avoiding-Sure-Loss' ist somit nicht erfüllt.

Die zeitweise Überlegung eines Individuums führt zur folgender neuer Einschätzung:

$$\overline{P}(a) = 0.55,\ \overline{P}(b) = 0.25,\ \overline{P}(c) = 0.4,\ \overline{P}(d) = 0.1$$

$$\underline{P}(a) = 0.45,\ \underline{P}(b) = 0.15,\ \underline{P}(c) = 0.30,\ \underline{d} = 0.05.$$

Diese Einschätzungen vermeiden einen sicheren Verlust. Allerdings implizieren sie, dass die Transaktion

$$I_a - 0.44 + I_c - 0.29 + I_d - 0.04 = 0.23 - I_b$$

akzeptabel ist. Dies bedeutet, dass das Individuum geneigt ist, gegen Spanien mit einer Rate von 0.23 zu wetten, die jedoch kleiner ist als $\overline{P}$(b). Folglich ist $\overline{P}$(b) zu groß gewählt. Die Eigenschaft der Kohärenz ist somit nicht erfüllt (Miranda, 2007, S. 20-28).

4.2 Konsistenz von 'imprecise prevision'

Infolge der exakten Übereinstimmung von 'upper previsions' mit dem Verständnis von Risikomaßen im Kontext der Wettinterpretation des Risikos X, formal beschrieben durch die Gleichung ρ(X)=$\overline{P}$(-X/r), können nicht nur die Annahmen über die Konsistenz von 'upper previsions'[8] sondern auch die zentralen Aussagen der Theorie über kohärente 'imprecise previsions' auf die Risikomaße übertragen werden. Eine erste Voraussetzung für Konsistenz von Risikomaßen liefert folgende Definition von Walley:

[8] Die Annahmen ergeben sich durch die Betrachtung der 'upper previsions' im Rahmen der Theorie über kohärente 'imprecise previsions'.

Definition 6. *Avoiding-Sure-Loss* Es wird vorausgesetzt, dass $\mathcal{D}$ eine Menge von beschränkten Zufallszahlen ist. Eine Abbildung $\overline{P}$ aus $\mathcal{D}$ in $\mathbb{R}$ ist demnach eine 'upper prevision' auf $\mathcal{D}$, die einen sicheren Verlust vermeidet, d.h. die Bedingung von Avoiding-Sure-Loss (ASL) erfüllt, falls für jedes n $\in \mathbf{N}$, für jedes X_1,..., $X_n \in \mathcal{D}$ und für jedes reelle und nicht-negative s_1,..., s_n gilt:

$$sup \sum_{i=1}^{n} s_i(\overline{P}(X_i) - X_i) \geq 0.$$

Unter dem Gesichtspunkt einer Wette ist $\overline{g}(X_i)=\overline{P}(X_i)-X_i$ ein durch den Verkauf von X_i zum Preis $\overline{P}(X_i)$ erzielter (zufälliger) Gewinn. Der Term $\overline{g}(X_i)$ wird, wegen der Interpretation von $\overline{P}(X_i)$ als Infimum des Verkaufspreises für X_i, als Grenzertrag bezeichnet. Geht man von nicht-negativen Koeffizienten aus, besagt die Bedingung von Avoiding-Sure-Loss (ASL), dass keine endliche lineare Kombination von Grenzerträgen zu einem sicheren Verlust führen kann, der von Null entfernt ist.

Kritisch anzumerken ist allerdings, dass die ASL-Bedingung in vielerlei Hinsicht als zu schwach erscheint. Sie kann etwa durchaus vereinbar sein mit nachfolgender Ungleichung $\overline{P}$(X) > sup X und führt somit zu folgendem Widerspruch: der Verkauf von X zu einem Preis, der über dem eigentlichen Wert von X liegt, ist aus der Sicht des Verkäufers rational, da er einen sicheren Gewinn erzielt, nicht jedoch aus der Sicht des Käufers. Die 'prevision' $\overline{P}$ sollte demnach eine stärkere Bedingung für Konsistenz erfüllen.

Definition 7. *Kohärenz* Es wird vorausgesetzt, dass $\mathcal{D}$ eine Menge von beschränkten Zufallszahlen ist. Eine Abbildung $\overline{P}$ aus $\mathcal{D}$ in $\mathbb{R}$ ist demnach eine kohärente 'upper prevision' für die Zufallszahlen in $\mathcal{D}$, falls für jedes n $\in \mathbf{N}$, für jedes X_0, X_1,..., $X_n \in \mathcal{D}$ und für jedes reelle und nicht-negative s_0, s_1,..., s_n gilt:

$$sup\overline{G} \geq 0$$

wobei $\overline{G}$ definiert ist als:

$$\overline{G} = \sum_{i=1}^{n} s_i(\overline{P}(X_i) - X_i) - s_0(\overline{P}(X_0) - X_0).$$

Durch Anwendung der Kohärenz werden nun die Schwächen der ASL-Bedingung, die der vorherigen Definition noch zu teils unerwünschten Eigenschaften führten, größtenteils eliminiert. Die Prämisse von Avoiding-Sure-Loss konnte beispielsweise nicht garantieren, dass die Ungleichung $\overline{P}$(X) > sup X, welche zu einer aus Käufersicht irrationalen Preisbildung führte, stets nicht erfüllt war. Die Kohärenz allerdings bewirkt nun, dass $\overline{P} \leq 0$ gilt. Dies wird dadurch erreicht, dass, ausgehend von Wetten, die Definition zu Kohärenz eine Erweiterung von der ASL-Erläuterung darstellt: die wettende Person kann, falls $s_0 \neq 0$ gilt, dazu genötigt werden, zum Preis von $\overline{P}(X_0)$ einen Zufallsbetrag X_0 zu kaufen.

Trotz seiner Schwächen, sollte das Konzept von Avoiding-Sure-Loss im Rahmen der Theorie über 'imprecise previsions' dennoch nicht unberücksichtigt bleiben. Die Gründe hierfür sind:

(I) Avoiding-Sure-Loss ist wesentlich leichter festzustellen und zu überprüfen als Kohärenz.

(II) Unter der Voraussetzung, dass eine 'upper prevision' $\overline{P}$ auf $\mathcal{D}$ existiert, welche einen sicheren Verlust vermeidet, d.h. die ASL-Bedingung erfüllt, gilt: es existiert stets ein kanonisches Verfahren, welches eine Korrektur von $\overline{P}$ in eine kohärente 'prevision' $\overline{P}_E$, das auf einer beliebigen Menge von Zufallszahlen $\mathcal{D}$' $\subset \mathcal{D}$ definiert ist, ermöglicht. $\mathcal{P}_E$ wird von Walley als natürliche Erweiterung (natural extension) bezeichnet und stellt eine zentrale Annahme innerhalb der Theorie zu 'imprecise previsions' dar[9].

Kohärente 'upper previsions' können durch die Verwendung von gewissen Axiomen beschrieben werden, falls $\mathcal{D}$ eine bestimmte Form aufweist. Von zentraler Bedeutung ist dabei folgender Fall (Walley, 1991, Kapitel 2.5.5):

Satz 1. Sei $\mathcal{L}$ ein linearer Raum und $\overline{P}$ eine Abbildung aus $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}$. $\overline{P}$ ist kohärent auf $\mathcal{L}$, genau dann wenn:

(I) $\overline{P}(\mathrm{X}) \leq \sup \mathrm{X}, \forall \mathrm{X} \in \mathcal{L}$

(II) $\overline{P}(\lambda \mathrm{X}) = \lambda \overline{P}(\mathrm{X}), \forall\ \mathrm{X} \in \mathcal{L}, \forall \lambda > 0$

(III) $\overline{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y}) \leq \overline{P}(\mathrm{X}) + \overline{P}(\mathrm{Y}), \forall\ \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathcal{L}$.

4.2.1 Theorie zu kohärente 'imprecise previsions'

Die Theorie zu kohärente 'imprecise previsions' ist sehr allgemeingültig und damit auf eine Vielzahl anderer Theorien respektive Konzepte übertragbar. Dieser Vorteil kommt auch im Rahmen der vorliegenden Arbeit zum Tragen. Dabei spielen nachfolgende grundlegenden Eigenschaften eine zentrale Rolle:

(i) Eine kohärente 'imprecise prevision' setzt keine präzise vorausgehende Wahrscheinlichkeitsverteilung für X voraus und ist somit weitaus flexibler als das Konzept der Erwartungen. Bei einer 'precise prevision' Fall ist das Konzept der Erwartungen jedoch gleichbedeutend mit dem der kohärenten 'prevision'. Der Terminus 'imprecision' setzt bei seiner Bewertung die Berücksichtigung einer 'upper' und einer 'lower prevision' voraus. Allerdings ist es vollkommen ausreichend, entweder lediglich die 'upper previsions' ($\overline{P}$) oder die 'lower previsions' ($\underline{P}$) zu verwenden, unter der Vor-

[9]Für eine ausführliche Erläuterung dieses Korrekturverfahrens sei auf Abschnitt 3.5 verwiesen.

aussetzung, dass folgende Gleichung gilt:

$$\underline{P}(X) = -\overline{P}(X).$$

Vorliegende Arbeit beschränkt sich in erster Linie auf die Verwendung der 'upper previsions', da diese im Rahmen der Interpretation von kohärenten Risikomaße als 'imprecise previsions' intuitiver erscheint.

(ii) Kohärente 'upper previsions' sind definiert auf beliebigen (nicht-leeren) Mengen von Zufallsgrößen und können somit auf eine Vielzahl von Situationen übertragen werden.

(iii) Eine kohärente 'upper prevision' $\overline{P}$ auf einer Menge $\mathcal{D}$ vorausgesetzt, existiert stets eine kohärente Erweiterung $\overline{P}$' auf einer beliebigen Untermenge $\mathcal{D}$'$\supset$ $\mathcal{D}$, sprich $\overline{P}$' ist kohärent auf $\mathcal{D}$' und gleich $\overline{P}$ auf $\mathcal{D}$ (Pelessoni & Vicig, 2003, S. 397-398).

4.3 Konsistenz von Risikomaßen

Die Gleichung ρ(X)=$\overline{P}$(-X/r) sowie die Definitionen zu Avoiding-Sure-Loss und Kohär-enz in Abschnitt 3.1 können als zwei äquivalente Definitionen für die Konsistenzeigenschaft bei Risikomaßen, die auf beliebigen Mengen von Zufallszahlen definiert sind, aufgefasst werden.

Definition 8. *Avoiding-Sure-Loss* Es wird vorausgesetzt, dass $\mathcal{D}$ eine beliebige Menge von Zufallszahlen ist. Eine Abbildung ρ aus $\mathcal{D}$ in $\mathbb{R}$ ist demnach ein Risikomaß, das einen sicheren Verlust vermeidet, d.h. die Bedingung von Avoiding-Sure-Loss (ASL) erfüllt, falls eine 'upper prevision' $\overline{P}$ auf einer Menge $\mathcal{D}$*={-X/r : X $\in$ $\mathcal{D}$} existiert, die einen sicheren Verlust vermeidet, sodass ρ(X)=$\overline{P}$(-X/r), $\forall$ X $\in$ $\mathcal{D}$.

Definition 9. *Kohärenz* Es wird vorausgesetzt, dass $\mathcal{D}$ eine beliebige Menge von Zufallszahlen ist. Eine Abbildung ρ aus $\mathcal{D}$ in $\mathbb{R}$ ist demnach ein kohärentes Risikomaß auf $\mathcal{D}$, falls eine kohärente 'upper prevision' $\overline{P}$, definiert auf einer Menge $\mathcal{D}$*={-X/r : X $\in$ $\mathcal{D}$} existiert, sodass ρ(X)=$\overline{P}$(-X/r), $\forall$ X $\in$ $\mathcal{D}$ (Pelessoni & Vicig, 2003, S. 399).

Es ist offenkundig, dass die Begründung dieser Bedingungen auf Basis des Konzepts von Wetten in einem engen Zusammenhang steht zu jener für die Bedingung zu 'upper previsions' auf selbem Konzept[10].

4.4 Kohärente Risikomaße im linearen Raum

Die diesem Abschnitt vorausgegangenen und detailliert erarbeiteten Theoreme zur Kohärenz von Risikomaßen wurden sehr generell gehalten. Im nun folgenden Teil der Arbeit wird daher unterstellt, dass die Menge der Risiken $\mathcal{D}$ einen linearen Raum bildet. Allerdings sei

[10]Für eine detaillierte Erläuterung sei auf Walley, P. (1991). *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities.* London: Chapman and Hall. verwiesen.

erwähnt, dass diese Annahme zu starken Einschränkungen führt sowie im Rahmen ihrer praktischen Anwendbarkeit als sehr unrealistisch erscheint[11]. Ferner kann jedes kohärente Risikomaß, definiert auf der Menge $\mathcal{D}$, auf die Menge $\mathcal{D}$' ausgeweitet werden, ohne die Kohärenz aufzugeben. Diese sich aus Punkt (iii) in Abschnitt 3.1.1 ergebende Eigenschaft ermöglicht eine Risikoeinschätzung von Positionen aus einer erweiterten Menge $\mathcal{D}$'. Im Folgenden werden die grundlegenden Annahmen für die Definition kohärenter Risikomaße im linearen Raum aufgeführt (Artzner et al., 1999, S. 203-228). Nachstehende zwei Annahmen werden dabei getroffen:

(i) Die Behauptung zum Referenzinstrument aus Abschnitt 2.4 gilt[12].
(ii) Die Menge der Zufallszahlen $\mathcal{D}$ ist ein linearer Raum, d.h. $\mathcal{D}$=$\mathcal{L}$.

Somit lautet die Definition eines kohärenten Risikomaßes, (i) und (ii) vorausgesetzt, wie folgt:

Definition 10. *Kohärentes Risikomaß* Sei $\mathcal{L}$ ein linearer Raum von Zufallszahlen, der reelle Konstanten (feste Größen) umfasst. Eine Abbildung ρ aus $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}$ wird als kohärentes Risikomaß bezeichnet, genau dann wenn es die nachstehenden vier Axiome erfüllt:

(I) **Subadditivität**

$$\forall X,\ Y \in \mathcal{L},\ \rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

Die Eigenschaft der Subadditivität veranschaulicht das Konzept der Diversifikation, welches besagt, dass das Einzelrisiko von zwei separat betrachteten Finanzpositionen stets größer/gleich dem Gesamtrisiko der Summe der beiden Positionen ist.

(II) **Positive Homogenität**

$$\forall X \in \mathcal{L},\ \forall \lambda \geq 0,\ \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$$

Liegt eine Position, die den λ-fachen Wert aufweist, vor, so muss diese auch das λ-fache Risiko aufweisen. Das Risiko muss somit proportional zu einem positiven Faktor steigen.

(III) **Monotonie**

$$\forall X,\ Y \in \mathcal{L},\ falls X \leq Y,\ dann\ \rho(Y) \leq \rho(X)$$

Die Monotonie-Eigenschaft besagt, dass das Risiko einer Finanzposition X stets größer ist als bei einer Position Y, falls der Wert von X für jeden möglichen Umweltzustand immer kleiner ist als der Wert von Y.

(IV) **Translationsinvarianz**

$$\forall X \in \mathcal{L},\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \rho(X + \alpha r) = \rho(X) - \alpha$$

[11] Die Suboptimalität dieser Annahme in der Praxis kann beispielsweise verdeutlicht werden, betrachtet man folgenden Fall: das Interesse eines Investors, welcher eine Position X hält, an einer Position -αX (α >0) könnte sehr gering sein, mitunter besteht sogar ein Verbot hinsichtlich des Besitzes eines negativen Finanzinstruments.

[12] Es wird angenommen, dass ein Referenzinstrument existiert, welches für jede zum Zeitpunkt t=0 investierte Geldeinheit eine zum Zeitpunkt t=T sichere Rendite r>0 erwirtschaftet.

Dieses Axiom verdeutlicht die Tatsache, dass eine Investition in ein Referenzinstrument, charakterisiert durch die Rendite r>0, das Risiko linear reduziert. Infolgedessen ist ein ursprünglich nicht akzeptable Finanzposition nun Element der Akzeptanzmenge.

Nachfolgendes Lemma ist für die im Rahmen dieses Passage modifizierten Verwendung von Satz 1 aus Abschnitt 3.1 von zentraler Bedeutung.

Lemma 1. Sei $\mathcal{L}$ ein linearer Raum von Zufallszahlen und r eine positive reelle Zahl. Eine Abbildung μ aus $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}$ erfüllt die folgenden Axiome:

(I)
$$\mu(X) \leq sup(-X/r), \forall X \in \mathcal{L}$$

(II)
$$\mu(\lambda X) = \lambda\mu(X), \forall X \in \lambda, \forall\lambda > 0$$

(III)
$$\mu(X + Y) \leq \mu(X) + \mu(Y), \forall X, Y \in \mathcal{L}$$

genau dann wenn eine kohärente 'upper prevision' $\overline{P}$ auf $\mathcal{L}$ existiert, sodass folgende Gleichung gilt: μ(X)=$\overline{P}$(-X/r).

Damit ergibt sich:

Satz 2. Sei $\mathcal{L}$ ein linearer Raum von Zufallszahlen, der reelle Konstanten (feste Größen) umfasst. Eine Abbildung ρ aus $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}$ erfüllt die Axiome der Subadditivität, der Positiven Homogenität, der Monotonie sowie der Translationsinvarianz, genau dann wenn es die drei Axiome aus obigem Lemma erfüllt.

Die simultane Anwendung von Lemma 1 und Satz 2, unter Berücksichtigung von Definition 9, liefert unmittelbar nachfolgende zentrale Aussage:

Satz 3. Sei $\mathcal{L}$ ein linearer Raum von Zufallszahlen, der reelle Konstanten (feste Größen) umfasst. Eine Abbildung ρ aus $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}$ ist laut Definition 9 ein kohärentes Risikomaß, genau dann wenn eine kohärente 'upper prevision' $\overline{P}$ auf $\mathcal{L}$ existiert, sodass ρ(X)=$\overline{P}$(-X/r), für jedes X$\in \mathcal{L}$ gilt (Pelessoni & Vicig, 2003, S. 400-402; Artzner et al., 1999, S. 209-210).

4.4.1 Übereinstimmung zwischen Axiome für Akzeptanzmengen und Axiome für Risikomaße

Artzner et al. setzen in ihrer Arbeit 'Coherent Measures of Risk' die Akzeptanzmenge als eine grundlegende Bedingung für die Beschreibung von Risikomaßen voraus. Ferner wurden die Axiome bislang vorwiegend im Rahmen der zugehörigen Risikomaße erörtert. Nachfolgende drei Sätze[13] begründen diese Vorgehensweise (Artzner et al., 1999, S. 210-

[13]Für die Beweise dieser drei Sätze sei verwiesen auf Artzner et al., 1999, S. 210-211.

211).

Satz 4. Falls eine Menge $\mathcal{B}$ die Axiome 1,2,3 und 4 aus Abschnitt 2.3.1 erfüllt, ist das Risikomaß $\rho_{\mathcal{B},r}$ kohärent. Überdies ist $\mathcal{A}_{\rho\mathcal{B},r}$=$\overline{\mathcal{B}}$ der Abschluss von $\mathcal{B}$.

Satz 5. Falls ein Risikomaß ρ kohärent ist, ist die Akzeptanzmenge $\mathcal{A}_\rho$ abgeschlossen und erfüllt die Axiome 1,2,3 und 4 aus Abschnitt 2.3.1. Ferner gilt: ρ=$\rho_{\mathcal{A}_\rho,r}$.

Satz 6. Falls eine Menge $\mathcal{B}$ die Axiome 1,2',3 und 4 erfüllt, erfüllt das kohärente Risikomaß $\rho_{\mathcal{B},r}$ die relevanten Axiome. Falls ein kohärentes Risikomaß ρ die relevanten Axiome erfüllt, erfüllt die Akzeptanzmenge $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{B}},r}$ das Axiom 2'.

4.5 Erhalt kohärenter Risikomaße mittels Umhüllungssatz

Kohärente Risikomaße setzen nicht zwingend das Wissen über eine zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeitsverteilung für jedes X voraus und unterscheiden sich in dieser Hinsicht daher von anderen Risikomaßen, wie dem VaR, welcher nicht kohärent ist[14]. Dieses Faktum wurde in der bisherigen Literatur zu kohärente Risikomaße vernachlässigt. Im Rahmen dieser Arbeit kann jedoch aufgezeigt werden, dass nachfolgender Satz, welcher aus dem Umhüllungssatz und Definition 8 folgt, gilt.

Satz 7. Ein Risikomaß ρ aus einer Menge $\mathcal{D}$ ist kohärent, genau dann wenn

$$\rho(X) = sup\{P(-X/r) : P \in \mathcal{P}\}$$

wobei $\mathcal{P}$ ($\neq \emptyset$) eine Menge von kohärenten 'precise previsions' auf $\mathcal{D}^* = \{-X/r : X \in \mathcal{D}\}$ ist.

Durch die indirekte Verwendung des Umhüllungssatzes über obigen Satz können Risikomaße auf der Basis von sogenannten 'scenarios' erarbeitet werden. Ein Szenario ist dabei eine '(precise) coherent prevision' P auf der Menge $\mathcal{D}$*. Für jedes X$\in$ $\mathcal{D}$ kann ein Risikomaß konstruiert werden, indem jeweils das Supremum von P(-X/r) über alle betrachteten Szenarien berechnet wird. Dieser Ansatz wurde beispielsweise von der Chicago Mercantile Exchange angewandt, um ein Risikomaß für die Messung von Marktrisiko zu entwickeln. Unter dem Namen SPAN (Standard Portfolio Analysis of Risk) wird seit dem Jahr 1995 der Margin[15] für Portfolios, bestehend aus bestimmten Finanzprodukten, berechnet. Zur Berechnung werden verschiedene Szenarien herangezogen, wobei jedes Szenario charakterisiert ist durch eine Auf- respektive Abwärtsbewegung unterschiedlicher Stärke der Preise jener Finanzpositionen im Portfolio. Das Risikomaß ist schließlich der maximal anfallende Verlust aus diesen Szenarien, gewichtet mit unterschiedlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten (Artzner et al., 1999, S. 212, Pelessoni & Vicig, 2003, S. 402-403).

[14]Der Beweis der fehlenden Kohärenzeigenschaft findet sich in Kapitel 4.4.3.

[15]Der Margin bezeichnet im Rahmen des Börsenhandels die Sicherheitsleistung für Börsentermingeschäfte durch die Hinterlegung eines Pfandes.

Obiger Satz zeigt ein allgemeines Verfahren für die Beschreibung von Risikomaßen auf, falls unzureichende oder unzuverlässige Informationen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung mancher X$\in \mathcal{D}$ vorhanden sind. Gesetz diesem Fall kann dennoch ein kohärentes Risikomaß konstruiert werden, indem Experten ihre individuelle 'precise prevision' auf der Menge $\mathcal{D}^*$ festlegen und ferner obiger Satz zu Anwendung kommt. Dem aufmerksamem Leser ist sicherlich aufgefallen, dass die Merkmale (i) und (ii) aus Abschnitt 3.1.1 über kohärente 'imprecise previsions' hier zum Trage kommen. Allen voran Punkt (ii) besagt, dass ein Szenario nur solche Risiken enthalten kann, welche für den jeweiligen Investor tatsächlich von Bedeutung sind. Auch ist es weitaus einfacher, wie Punkt (i) zeigt, nur eine 'precise prevision' für X festzusetzen, was dem Grundgedanken eines Szenarios entspricht, als die jeweilige Wahrscheinlichkeitsverteilung von X auszuwerten (Pelessoni & Vicig, 2003, S. 403).

Bei Verwendung dieses Ansatzes besteht zwar noch die Problematik der Überprüfung der Kohärenz von einer 'precise prevision' auf der Menge $\mathcal{D}^*$. Allerdings besteht die Möglichkeit, falls alle X$\in \mathcal{D}$ eine endliche Anzahl von unterschiedlichen Werten aufweisen, die Überprüfung mittels Lösung eines linearen Optimierungsproblems durchzuführen[16].

4.6 Kohärente Korrektur von Risikomaßen mit Avoiding-Sure-Loss-Eigenschaft

Die Korrektur von Risikomaßen mit Avoiding-Sure-Loss-Eigenschaft, sodass diese das Kriterium der Kohärenz erfüllen, kann mittels zwei Verfahren erfolgen. Ersteres greift den Ansatz der 'Natürlichen Erweiterung' von 'imprecise previsions' auf; letzteres nutzt jene Konzepte, welche ursprünglich im Rahmen der Theorie von Intervallwahrscheinlichkeiten nach Weichselberger entwickelt wurden.

4.6.1 Einführung in das Konzept der natürlichen Erweiterung

Vergegenwärtigt man sich erneut das Beispiel der Fußball-Weltmeisterschaft, so lässt sich auch hiermit das Konzept der natürlichen Erweiterung auf anschauliche Weise erläutern. Gegeben seien folgende Lotterien:

$$f(a) = 5,\ f(b) = 2,\ f(c) = -5,\ f(d) = -10$$

$$g(a) = 2,\ g(b) = -2,\ g(c) = 0,\ g(d) = 5$$

mit {a, b, c, d}={Griechenland, Spanien, Deutschland, sonstige}.
Es gilt die Einschätzung $\underline{P}$(f)=2, $\underline{P}$(g)=0. Es stellt sich nun nachfolgende Frage:
Liefert diese Einschätzung Rückschlüsse darauf, wie viel man für nachfolgende Lotterie zahlen sollte:

$$h(a) = 7,\ h(b) = 4,\ h(c) = -5,\ h(d) = 0?$$

Da h$\geq$f+g, sollte ein Individuum geneigt sein, mindestens $\underline{P}$(f)+$\underline{P}$(g)=2 zu zahlen. Ferner ist von zentraler Bedeutung, ob es hierbei möglich ist, noch präziser zu sein.

[16]Vergleiche dazu de Finetti, B. (1974). *Theory of Probability*, vol. 1. London: Wiley.

Sei eine kohärente 'lower prevision' $\underline{P}$ mit Wertebereich $\mathcal{K}$ gegeben und sei das Ziel die Ermittlung der Konsequenzen, die sich bei Einschätzung in $\mathcal{K}$ von Lotterien außerhalb des Wertebereichs ergeben, so lautet die Definition der natürlichen Erweiterung wie folgt:

Definition 11. *Natürliche Erweiterung* Die natürliche Erweiterung von $\underline{P}$ für alle Lotterien ist gegeben durch

$$\underline{E}(f) := sup\{\mu : \exists f_k \in \mathcal{K},\ \lambda_k \geq 0,\ k = 1, ..., n :$$

mit

$$f - \mu \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_k(f_k(\omega) - \underline{P}(f_k))\}.$$

Dabei ist $\underline{P}$(f) das Supremum des akzeptablen Kaufpreises für f, der sich aus der Einschätzung der Lotterien im Wertebereich ableiten lässt.

Betrachtet man h-3.4 $\geq$ 1.2 (f-$\underline{\text{P}}$(f)), liefert die Definition der natürlichen Erweiterung, unter Anwendung obigen Beispiels, das Ergebnis $\underline{E}$(h)=3.4. Folglich implizieren die kohärenten Einschätzungen $\underline{P}$(f)=2, $\underline{P}$(g)=0, dass das Individuum mindestens 3.4 für die Lotterie h zahlen sollte, jedoch nicht mehr.

Die allgemeinen Eigenschaften der natürlichen Erweiterung sind wie folgt gegeben:

- Falls $\underline{P}$ einen sicheren Verlust vermeidet, ist $\underline{E}$ die geringste kohärente lower prevision auf $\mathcal{L}(\mathcal{X})$, die $\underline{P}$ auf $\mathcal{K}$ dominiert.
- $\underline{P}$ ist kohärent, genau dann wenn $\underline{E}$ mit $\underline{P}$ auf $\mathcal{K}$ übereinstimmt.
- $\underline{E}$ ist somit die am geringsten verbindliche Erweiterung von $\underline{P}$: falls es andere Erweiterungen geben sollte, reflektieren diese eine stärkere Einschätzung als diese in $\underline{P}$

(Miranda, 2007, S. 38-41).

4.6.2 Kohärente Korrekturverfahren

Ansatz 1: Bildung einer 'Natürlichen Erweiterung'

Der Ansatz zur Korrektur von Risikomaßen, die die Eigenschaft von Avoiding-Sure-Loss aufweisen, in kohärente Risikokennzahlen entspricht derjenigen Vorgehensweise bei Korrektur von 'upper previsions'. Die Begründung für die Äquivalenz beider Verfahren wird offenkundig, betrachtet man Definition 8. Ferner besagt Punkt (II) in Abschnitt 4.2., dass eine 'upper prevision', die definiert ist auf der Menge $\mathcal{D}$ und einen sicheren Verlust vermeidet, korrigiert werden kann, indem ihre jeweilige natürliche Erweiterung $\overline{P}_E$ gebildet wird.

Wie bereits erwähnt, erfolgt die Korrektur einer 'upper prevision' $\overline{P}$, die definiert ist auf einer Menge $\mathcal{D}$ und einen sicheren Verlust vermeidet, indem die jeweilige natürliche Erweiterung $\overline{P}_E$ für jedes X aus einer beliebigen Menge von Zufallsgrößen $\mathcal{D}' \supset \mathcal{D}$ gebildet wird. Diese Erweiterung weist dann die folgenden Eigenschaft der Kohärenz auf:

(a) $\overline{P}_E$ ist eine kohärente 'upper prevision' auf der Menge $\mathcal{D}$';
(b) $\overline{P}_E$(X) $\leq \overline{P}$(X), $\forall$X $\in \mathcal{D}$;
(c) falls $\overline{P}$* eine kohärente 'upper prevision' auf der Menge $\mathcal{D}$ ist, sodass $\overline{P}$*(X)$\leq \overline{P}$(X), $\forall$X $\in \mathcal{D}$', gilt $\overline{P}$*(X)$\leq \overline{P}_E$(X), $\forall$ X$\in \mathcal{D}$';
(d) $\overline{P}_E$(X)=max{P(X) : P $\in \mathcal{M}(\overline{P})$}.

Die entscheidende Prämisse für die Bildung der natürlichen Erweiterung eines Risikomaßes ρ lässt sich aus nachfolgender Aussage ableiten: das jeweilige ρ muss die Avoiding-Sure-Loss-Eigenschaft erfüllen. Die anschließende Korrektur erfolgt durch Transformation von ρ(X)=$\overline{P}$(-X/r) in ρ*(X)=$\overline{P}_E$(-X/r). Aus den Aussagen (a) und (c) folgt, dass dieses transformierte ρ* kohärent sowie die geringste verbindliche[17] kohärente Korrektur von ρ ist. Die Bedeutung von Axiom (d) lautet wie folgt: aus der Menge $\mathcal{M}(\overline{P})$ aller 'precise previsions', wobei diese von $\overline{P}$ auf der Menge $\mathcal{D}$ dominiert werden, wird die natürlichen Erweiterung berechnet.

Ein besonderes Augenmerk wird nachfolgend jedoch auf Axiom (b) gelegt. Vorab sei erwähnt, dass eine nicht akzeptable Position in eine gerade akzeptable Position korrigiert werden kann, indem zur betrachteten Position ein Betrag[18] addiert wird, der sich durch Investition in ein anderes (finanzwirtschaftliches) Instrument ergibt. Folglich gilt für (b): die natürliche Erweiterung ρ*(X) von ρ(X) ist dem Risikomaß ρ(X) unterlegen; ρ(X) dominiert ρ(X)*. Ausgehend von einem Risiko X mit nicht wünschenswerten Eigenschaften, wird im Vergleich zum ursprünglichen Risikomaß ρ ein in gleicher Höhe respektive geringerer Geldbetrag benötigt, um dieses Risiko auch bei Anwendung von ρ* als erstrebenswert klassifizieren zu können. Somit ist die natürliche Erweiterung ρ*(X), im Vergleich zum ursprünglichen Risikomaßes ρ, als weniger vernünftig anzusehen, sodass andere Korrekturverfahren für nicht kohärente Risikomaße ρ(X) benötigt werden (Pelessoni & Vicig, 2003, S. 408-411).

Allerdings sei hier überdies erwähnt, dass einige praktische Einschränkungen gegen die Anwendung der natürlichen Erweiterung als Korrekturmaßnahme für Risikomaße sprechen. Mitunter kann eine regulierende Behörde eine untere Schranke für eine beliebige Korrektur ρ* eines nicht kohärenten VaR, wie ρ*>VaR$_\alpha$, festsetzen oder schlicht einfach eine weitaus vernünftigere Korrektur für ρ anstatt einer weniger vernünftigeren fordern, d.h. eine Korrektur, die einen höheren Risikoschutz als ρ sicherstellt. Eine mögliche Lösung dieses Problems ermöglicht die Korrektur von ρ(X) in die entgegengesetzte Richtung; das Auffinden einer 'upper extension' $\overline{P}_U$, sodass $\overline{P}_U \geq \rho$(X) gilt. Diese Korrektur 'nach außen' erweitert das Risiko in geeigneter Weise, anstatt es, wie unter Ansatz 1, zu verkleinern

[17]Eine geringste verbindliche Korrektur bedeutet, dass die natürliche Erweiterung $\overline{P}_E$ einer 'upper prevision' $\overline{P}$ so gestaltet ist, dass die obigen Eigenschaften (b) und (c) zutreffen.
[18]Der minimale Kapitaleinsatz wird dabei als Risikomaß bezeichnet.

und verkörpert folglich eine weitaus bessere Korrekturmaßnahme für den Anwendungsbereich Risikomanagement. Die resultierende 'upper extension' ist somit kohärent und gewissermaßen eine optimale Korrektur unter all jenen kohärenten Risikomaßen, die ρ(X) dominieren (Vicig, 2008, S. 170). Diese Vorgehensweise entspricht derjenigen im nachfolgendem Ansatz 2.

Ansatz 2: Intervallwahrscheinlichkeiten nach Weichselberger
Konkret lautet das Problem der Korrektur hin zu einem überlegenden Risikomaß ('prudential correction problem') wie folgt: ersetze eine nicht kohärente 'upper prevision' $\overline{P}$ durch eine kohärente 'upper prevision' $\overline{P}$*, sodass $\overline{P}$*(X)$\geq$ $\overline{P}$(X), $\forall$X$\in$ $\mathcal{D}$ ($\overline{P}$* dominiert $\overline{P}$), ohne jedoch unnötigerweise zusätzliche Ungenauigkeit ('imprecision') hinzuzufügen, d.h. ohne einen, gemessen am Risiko X, unverhältnismäßig hohen Betrag an Kapital bereitzustellen, um das Risiko aus der Menge $\mathcal{D}$ abzusichern. Dieses Problem wird von Weichselberger unter Hinweis auf Intervallwahrscheinlichkeiten betrachtet. Die dahinter stehenden grundlegenden Annahmen können jedoch auf die allgemeinere Theorie der 'imprecise previsions' übertragen werden, was im nachfolgenden Ansatz 2 veranschaulicht wird (Pelessoni & Vicig, 2003, S. 409).

Für die Modifikation von $\overline{P}$ zu $\overline{P}$* sei vorab erwähnt, dass

$$\overline{P}(X) \leq supX, \qquad \forall X \in \mathcal{D},$$

gelten muss; andernfalls existiert kein dominierendes kohärentes $\overline{P}$*, da $\overline{P}$* $\leq$ sup X eine notwendige Bedingung für die Kohärenz darstellt[19].
Ferner stellt sich die Frage, wie die jeweiligen 'upper previsions', die $\overline{P}$ dominieren, ermittelt werden können, da sie eine zentrale Rolle bei der Korrektur von nicht kohärenten Risikomaßen spielen. In nachfolgender Definition werden diese 'upper previsions' als 'upper extensions' definiert und ihre Existenz wird im sich daran anschließenden Satz bewiesen. Es sei an dieser Stelle noch erwähnt, dass jener Satz eine Verallgemeinerung des Satzes 2.8.9 von Weichselberger auf beliebige Mengen von 'upper previsons' darstellt (Weichselberger, 2001).

Definition 12. *Upper extension* Sei $\overline{P}$ eine 'upper prevision' definiert auf der Menge $\mathcal{D}$ und $\mathcal{U}(\overline{P})$ die Menge der kohärenten 'upper previsions', die $\overline{P}$ auf der Menge $\mathcal{D}$ dominieren. Demnach ist $\overline{P}_u$ eine 'upper extension' von $\overline{P}$, falls $\overline{P}_u \in \mathcal{U}(\overline{P})$ und falls, für $\overline{P}$*$\in \mathcal{U}(\overline{P})$, $\overline{P}$*(X)$\leq$ $\overline{P}_u$(X) $\forall$X$\in$ $\mathcal{D}$ impliziert $\overline{P}$*=$\overline{P}_u$.

Satz 8. Eine 'prevision' $\overline{P}$, welche einen sicheren Verlust vermeidet und obige Gleichung $\overline{P}$(X)$\leq$ sup X, $\forall$ X$\in$ $\mathcal{D}$ erfüllt, besitzt mindestens eine 'upper extension'.

Obiger Satz zeigt auf, dass stets eine 'upper extension' von $\overline{P}$ gewählt werden kann,

[19]Diese Bedingung ist außerdem hinreichend, da dann zumindest die unbestimmte kohärente 'upper prevision' $\overline{P}$*(X)=sup X, wobei $\forall$X$\in$ $\mathcal{D}$, $\overline{P}$ dominiert.

um diese zu korrigieren, falls eine vernünftige Korrektur möglich ist. Allerdings können, im Unterschied zur natürlichen Erweiterung, eine Vielzahl von, mitunter unendlich viele, 'upper extensions' von $\overline{P}$ existieren, sodass ein zusätzliches Kriterium von Nöten ist. Ein alternativer Ansatz ist hierbei durch die Verwendung der 'upper hull'

$\overline{P}_H$=sup$\{\overline{P}_u : \overline{P}_u$ 'upper extension' für $\overline{P}\}$

gegeben, welche Weichselberger's F-Hülle[20] entspricht und kohärent ist. Allerdings ist die 'upper hull' weitaus ungenauer als jede andere 'upper extension': sie ist die vorsichtigste unter den vernünftigen Korrekturen von $\overline{P}$ und dominiert jede 'upper extension' (Pelessoni & Vicig, 2003, S. 410).

5 Risikomaße in der Praxis

Rekurrierend auf die in dieser Arbeit erarbeiteten allgemeinen Risikodefinitionen und Auswahlkriterien in Bezug auf ein gutes Risikomaß, wird nachfolgend deren praktische Bedeutung verdeutlicht sowie aufgezeigt, welche Kennzahlen die Kohärenzeigenschaft aufweisen.

5.1 Kohärenz-Axiome in der Praxis

Artzner et al. setzen bei der Formulierung der vier Axiome voraus, dass im Rahmen des Risikomanagements eine Differenzierung zwischen akzeptablen und nicht akzeptablen Portfolios möglich ist. Charakteristisch für nicht akzeptable Portfolios sind ein zu hohes Risiko, wobei dies einen zu niedrigen Portfoliowert zum prognostizierten Zeitpunkt impliziert (Theiler, 2002, S. 70). Die Autoren verstehen die Bestimmung der Menge aller zulässigen Portfoliowerte, welche aus allen Portfoliopositionen mit einem akzeptablen zukünftigen Wert besteht, bereits als eine grobe Risikomessung (Artzner et al., 1999, S. 205). Für die nachfolgende Risikoanalyse werden lediglich die nicht akzeptablen Positionen berücksichtigt. Das Ziel ist nun, für diese den jeweils kleinsten Kapitalbetrag zu ermitteln, welcher für die jeweilige untersuchte Position den geringsten, jedoch gerade noch akzeptablen Wert ergibt. Gemäß dieser Überlegung definieren Artzner et al. ein Risikomaß wie folgt (Artzner et al., 1999, S. 204):

> Der minimale Kapitaleinsatz, der benötigt wird, um aus einer nicht akzeptablen Position durch Investition in andere (finanzwirtschaftliche) Instrumente und deren Kombination mit der betrachteten Position eine gerade akzeptable Position zu generieren, wird als Risikomaß bezeichnet.

Ein kohärentes Risikomaß ρ erfüllt, wie bereits erläutert, folgende vier Eigenschaften, welche nun anhand ihrer praktischen Anwendung beschrieben werden[21] (Artzner et al., 1997, S. 68; Artzner et al., 1999, S. 208-210; Theiler, 2002, S. 72):

[20]Für eine ausführliche Beschreibung der F-Hülle sei verwiesen auf Weichselberger (2001).

[21]Für die Definition nachfolgend verwendeten Größen sei auf Kapitel 3.3.1 verwiesen.

1. **Subadditivität**
   Weist ein Risikomaß die Subadditivitäts-Eigenschaft auf, so bedeutet dies, dass das Risiko eines Portfolios, welches aus zwei Positionen X_1 und X_2 besteht, stets kleiner oder gleich der Summe der Einzelrisiken jener zwei Positionen ist. Mit Hilfe dieses Axioms wird der Diversifikationseffekt im Portfoliokontext berücksichtigt: durch Hinzunahme einer Position X_2 in ein bereits bestehendes Portfolio mit der Position X_1 steigt das Portfoliorisiko maximal um das Einzelrisiko von X_2 an. Somit gilt für jedes X_1 und $X_2 \in \mathcal{G}$:

   $\rho(X_1+X_2) \leq \rho(X_1)+\rho(X_2)$

2. **Positive Homogenität**
   Falls eine Position, die den λ-fachen Wert aufweist, auch das λ-fache Risiko beinhaltet, liegt das Homogenitäts-Axiom vor. Es besagt, dass das Risiko proportional zu einem positiven Faktor λ steigt. Es gilt daher für $\forall\lambda \geq 0$ und für jedes $X \in \mathcal{G}$:

   $\rho(\lambda \cdot X)=\lambda \cdot \rho(X)$

3. **Monotonie**
   Es wird angenommen, dass der Wert von X für jeden möglichen Umweltzustand stets kleiner ist als der Wert von Y, sodass X ein höheres Verlustpotential als Y aufweist. Somit ist auch das Risiko für X stets größer als bei Y (Denault, 2001, S. 5; Albrecht, 2003, S. 13f). Es gilt für jedes X und $Y \in \mathcal{G}$ mit $X \leq Y$:

   $\rho(X) \geq \rho(Y)$

4. **Translationsinvarianz**
   Die Eigenschaft der Translationsinvarianz beschreibt das Risikomaß als einen mindestens zu investierenden Kapitalbetrag, sodass eine nicht akzeptable Position in eine akzeptable transformiert wird. Konkret bedeutet dies, dass sich das Risiko eines Portfolios um einen Betrag α verringert, falls, für die betrachtete Haltedauer, zu einem bereits vorhandenen Portfolio X zusätzlich ein Geldbetrag α zum risikofreien Zinssatz r_f investiert wird. Es gilt für jedes $X \in \mathcal{G}$ und für jede reelle Zahl α:

   $\rho(X+(1+r_f)\cdot\alpha)=\rho(X)-\alpha$

   Das Risiko der Ursprungs-Position wird folglich durch die Hinzunahme der risikofreien Position neutralisiert, indem ein Anlagebetrag α in Höhe des vorhandenen Risikopotenzials der bestehenden Position X zum risikofreien Zinssatz r_f investiert wird.

Ein Risikomaß, das die Axiome der Subadditivität und der Positiven Homogenität erfüllt, ist konvex.

5.2 Überprüfung der Kohärenz verschiedener Risikomaße

5.2.1 Varianz und Standardabweichung

Ein aus der Statistik bekanntes und auch in der finanzwirtschaftlichen Theorie stark verbreitetes Risikomaß ist die Varianz s^2 (bzw. Standardabweichung s). Als Streuungsmaß misst diese Kennzahl die mittlere quadratische Abweichung vom arithmetischen Mittel $\overline{x}$.

Definition 13. *Varianz: stetige Daten* Die Varianz ist bei stetigen Originaldaten definiert[22] als

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Definition 14. *Varianz: diskrete Daten* Liegen diskrete Daten a_j mit absoluten Häufigkeiten n_j und $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{k} n_j a_j$ vor, ist die Varianz definiert als

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j(a_j - \overline{x})^2$$

(Toutenburg & Heumann, 2006, S. 77-79).

Definition 15. *Arithmetisches Mittel* Das arithmetische Mittel (Mittelwert) $\overline{x}$ ist der am häufigsten benutzte Lageparameter der Verteilung eines quantitativen Merkmals und errechnet sich als Durchschnittswert aller Beobachtungen

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(Toutenburg & Heumann, 2006, S. 62).

Definition 16. *Standardabweichung* Die Standardabweichung s ist die positive Wurzel aus der Varianz und definiert als

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

(Toutenburg & Heumann, 2006, S. 80).

Per Definition quantifiziert die Varianz die mittlere quadratische Abweichung vom arithmetischen Mittel $\overline{x}$. Sie stellt infolgedessen ein zweiseitiges bzw. symmetrisches Risikomaß dar: es werden sowohl positive als auch negative Abweichungen von $\overline{x}$ erfasst (Goovaerts, Kaas & Dhaene, 2002, S. 1; Theiler, 2002, S. 76). Jedoch entspricht solch eine Quantifizierung von Risiko nicht der unter Absatz 3.1 aufgezeigten Risikodefinition, da dieser Terminus Risiko ausschließlich als negative Abweichungen beschreibt. Symmetrische Kennzahlen, wie Varianz und Standardabweichung sind ferner für asymmetrische Verteilungen, wie

[22] *Anmerkung:* In der deskriptiven Statistik wird die Varianz s^2 als arithmetisches Mittel der Abweichungsquadrate $(x_i - \overline{x})^2$ berechnet, also mit dem Faktor $\frac{1}{n}$. In der induktiven Statistik, die nicht auf vollständigen Grundgesamtheiten sondern auf Stichproben basiert, wird aus mathematischen Gründen (Erwartungstreue des Schätzers) der Faktor $\frac{1}{n-1}$ verwendet und als Stichprobenvarianz bezeichnet (Toutenburg & Heumann, 2006, S. 78).

Kreditverluste, generell ungeeignet[23]. Auch kann durch sie das ökonomische Risiko nicht direkt gemessen werden. Die Varianz drückt bei Verlustbetrachtung das Risiko nicht in Geldeinheiten, sondern in Geldeinheiten zum Quadrat aus. Die Standardabweichung als Wurzel der Varianz misst das Risiko zwar in Geldeinheiten, allerdings ist auch durch diese Kennzahl keine Interpretation im Sinne von zu unterlegendem Risikokapital möglich. Sie beschreibt lediglich die Streuung der Verluste (Wehrspohn, 2001, S. 582; Hahn, Pfingsten, & Wagner, 2001, S. 278).

Bei allgemeiner Betrachtung sind Standardabweichung und Varianz keine konvexen Risikomaße. Beide Kennzahlen sind zwar positiv homogen, allerdings ist die Subadditivitätseigenschaft nicht gegeben (Theiler, 2002, S. 72; Acerbi, Nordio & Sirtori, 2001, S. 5). Beide Kennzahlen zählen ferner auch nicht zu den kohärenten Risikomaßen: durch die Berücksichtigung von positiven und negativen Abweichungen vom mittleren Verlust wird neben der bereits erwähnten Subadditivitätseigenschaft auch die Eigenschaft der Monotonie verletzt (Theiler, 2002, S. 73). Nachfolgendes Beispiel, obgleich recht grundlegend, verdeutlicht dies, unter Verwendung der Standardabweichung[24], auf anschauliche Weise.

Beispiel 1. Als Nachweis für das Nichterfüllen der Monotonie werden zwei Risiken X und Y mit gegebenen Verlustausprägungen in den jeweiligen Umweltzuständen betrachtet.

Umweltzustand	**Risiko X: Verlust**	**Risiko Y: Verlust**
A	1	2
B	2	2
C	2	2

Während der Mittelwert von Risiko X $\overline{x}$=$\frac{5}{3}$ und die Varianz s_x^2=$\frac{2}{9}$ beträgt, weist Risiko Y einen mittleren Verlust von $\overline{y}$=2 sowie eine Varianz von s_y^2=0 auf. Folglich errechnet sich für Risiko X eine Standardabweichung von s_x=0.47 und für Risiko Y eine Standardabweichung von s_y=0. Verwendet man die Standardabweichung als Risikomaß, bedeutet obiges Ergebnis, dass $\rho(X) \geq \rho(Y)$ gilt. Allerdings wird aus der Tabelle ersichtlich, dass Risiko Y riskanter ist als Risiko X: in jedem möglichen Umweltzustand ist der Verlust von Risiko Y mindestens so hoch wie der von Risiko X. Diese beiden Feststellungen stehen im Widerspruch zur obigen Definition der Monotonie. Somit ist bewiesen, dass die Standardabweichung nicht das Axiom der Monotonie erfüllt (CAS, Kapitel 9, S. 6-8).

[23]In Verbindung mit der in Abschnitt 3.1 angegebenen Risikodefinition wäre die untere Semivarianz hier ein adäquateres Risikomaß. Sie misst die mittlere quadratische Abweichung für diejenigen Werteausprägungen einer Verlustverteilung, welche größer sind als das arithmetische Mittel (Kürsten & Straßberger, 2004, S. 204). Da sie jedoch nicht zu den in der Praxis angewandten 'klassischen' Risikomaßen zählt, wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht näher darauf eingegangen.

[24]Aufgrund der Tatsache, dass sich die Standardabweichung als die Wurzel aus der Varianz berechnen lässt, wird auf einen Nachweis für die Varianz an dieser Stelle verzichtet. Die Ergebnisse der Standardabweichung lassen sich jedoch auf die Varianz übertragen.

5.2.2 Value at Risk

Das Risikomaß Value at Risk[25] betrachtet lediglich die Verlustseite einer Verteilung und gehört damit zur Kategorie der Downside-Risikomaße (Jorion, 2001, S. 15). Er wird definiert als der maximal mögliche Verlust einer Position respektive eines Portfolios von Positionen über einen bestimmten Zeitraum bei einem vorgegebenen Konfidenzniveau 1-α, wobei die Wahrscheinlichkeit, mit welcher ein möglicher eintretender Verlust nicht überschritten wird, eben durch dieses Konfidenzniveau gegeben ist. Ein Verlust-Szenario, das den VaR-Wert überschreitet, tritt somit nur in α% der Fälle ein (Jorion, 2001, S. 22; Wilson, 1999, S. 61; Völker, 2001, S. 70). Die formale Definition des VaR lautet wie folgt: bei einem gegebenen Konfidenzniveau von 1-α verkörpert der VaR eine Verlustschranke, welche nur mit Wahrscheinlichkeit p=α überschritten wird.

Die im Rahmen der Finanzstatistik gebräuchliche Definition des VaR wird im Folgenden beschrieben. Hierbei bezeichnet X den Verlust und F die stetige und streng monotone Verteilungsfunktion[26]. Der VaR stellt das untere α-Quantil der Verteilung von X dar. Im Spezialfall, dass F invertierbar ist, verwendet man die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion F^{-1}, sodass der VaR direkt ermittelt werden kann

$$VaR_\alpha(X) = F^{-1}(\alpha).$$

Aus mathematischer Sicht ist der VaR nichts anderes als ein Quantil der Verteilung des zugrunde liegenden Risikos eines künftigen Endvermögens X. Für stetige und streng monotone Verteilungsfunktionen F_X ist das Quantil q_α für $\alpha \in$[0,1] eindeutig definiert, sodass die Quantilfunktion als Inverse der Verteilungsfunktion, also F_X^{-1}, gegeben ist. Der allgemeine Fall wird jedoch erschwert durch mögliche Unstetigkeiten von F_X (Ott, 2005, S. 86-87). Ein häufiger Ansatz der Risikomessung von Finanzpositionen X besteht somit darin, ein Quantil der Verteilung von X unter einem Wahrscheinlichkeitsmaß P zu bestimmen.

Definition 17. *Quantil.* Sei X eine Zufallsvariable mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung P sowie $\alpha \in$ (0,1). Das α-Quantil von X ist eine reelle Zahl q, sodass P(X≤q) $\geq \alpha$, P(X<q) $\leq \alpha$.

Die Menge aller α-Quantile von X ist ein Intervall [$q_X^-(\alpha)$, $q_X^+(\alpha)$] mit

$$q_X^-(\alpha) = sup\{x : P(X < x) < \alpha\} = inf\{x : P(X \leq x) \geq \alpha\}$$

$$q_X^+(\alpha) = inf\{x : P(X \leq x) > \alpha\} = sup\{x : P(X < x) \leq \alpha\}$$

und mit Verteilungsfunktion F_X(x)=P(X $\leq$ x) gilt:

$$q_X^-(\alpha) = inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\}$$

$$q_X^+(\alpha) = inf\{x : F_X(x) > \alpha\}.$$

[25] Im Bereich des Kreditmanagements wird der VaR auch als Credit Value at Risk bezeichnet.

[26] Für eine Verallgemeinerung der Definition des VaR auf nicht stetige Verteilungsfunktionen sei verwiesen auf Otto, 2005, S. 87-90.

Im Rahmen dieser Arbeit liegt der Fokus auf den Eigenschaften von $q_X^+(\lambda)$, wobei X das künftige Endvermögen einer Finanzposition beschreibt. Ferner wird nachfolgend die Definition von Artzner et al. verwendet, die den VaR_α wie folgt bestimmt:

Definition 18. *Value-at-Risk.* Sei X eine Zufallsgröße, die das künftige Endvermögen repräsentiert und deren Wahrscheinlichkeitsverteilung mit P gegeben ist. Ferner ist ein Referenzinstrument r gegeben. Der Wert q ist ein α-Quantil mit $\alpha \in [0,1]$ für X falls

$$P(X < q) \leq \alpha \leq P(X \leq q).$$

Anschließend erfolgt die Definition

$$q_\alpha^+(X) = inf\{x : P(X \leq x) > \alpha\},$$

bzw.

$$VaR_\alpha(X) = -q_\alpha^+(X/r),$$

sodass der VaR_α des künftigen Endvermögens X zum Niveau α mit Wahrscheinlichkeitsverteilung P bei gegebenem Niveau α der Negativwert des Quantils q_α^+ von X/r ist. Da der VaR allerdings ein quantilbasiertes Maß darstellt, ist er nahezu uninformativ bei Ausprägungen von X/r, die kleiner als die Schwelle q_α^+ sind. Er liefert ausschließlich die Information, dass die Wahrscheinlichkeit als Ganzes der Ausprägungen von X/r oberhalb des gewählten α-Quantils begrenzt ist. Offensichtlich ist somit auch die Tatsache, dass, gegeben die Wahrscheinlichkeitsverteilung P, die Absenkung von α eine vorsichtigere Risikoeinschätzung generiert (Pelessoni & Vicig, 2003, S. 403-404).

Die hier verwendete Definition des VaR_α ist somit der tatsächliche Betrag an zusätzlichem Kapital, der sich durch eine Berechnung auf Basis des VaR_α ergibt (Artzner et al., 1999, S. 215-216)[27]. Im Finanzkontext ist VaR_α die kleinste Kapitalmenge, die, sobald sie zu X hinzugefügt und risikolos investiert wird, die Wahrscheinlichkeit eines negativen Endvermögens unter dem Niveau α hält. Im Rahmen der Analyse der an ein Kreditrisikomaß zu stellenden Anforderungen gemäß den Axiomen von Artzner et al. lässt sich aufzeigen, dass der VaR nicht alle diese Prinzipien erfüllt und somit nicht kohärent ist[28]. Schon allein die Tatsache, dass er kein konvexes Risikomaß darstellt, da die Eigenschaft der Subadditivität im Allgemeinen verletzt wird[29], erübrigt die Überprüfung der restlichen Axiome.

[27] Die hier verwendete Definition des VaR entspricht derjenigen aus der Satzung des Baseler Ausschusses für Bankenaufsicht. Allerdings wird aus der Satzung nicht ersichtlich, ob eine (geschätzte) objektive Wahrscheinlichkeit oder eine 'sorgfältig ausgewählte' subjektive Wahrscheinlichkeit heranzuziehen ist (Artzner et al., 1999, S. 216).

[28] Auf den Nachweis der Kohärenz über die Avoiding-Sure-Loss-Eigenschaft wird an dieser Stelle verzichtet. Es würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Es sei an dieser Stelle nur erwähnt, dass VaR nicht notwendigerweise einen sicheren Verlust vermeidet. Der interessierte Leser sei jedoch verwiesen auf Pelessoni & Vicig, 2003, S. 403-407.

[29] Es existieren allerdings Klassen von Verteilungen, innerhalb derer die Subadditivitätseigenschaft des VaR erfüllt ist, wie etwa die Klasse der Normalverteilungen für den Fall $\alpha < 0.5$. Das Risikomaß VaR ist somit unter gewissen Voraussetzungen durchaus kohärent (Albrecht, 2003, S.31; Artzner et al., 1999, S. 217).

Der Vollständigkeit halber sei jedoch erwähnt, dass der VaR die Eigenschaften der positiven Homogenität, der Monotonie sowie der Translationsinvarianz erfüllt (Frey & McNeil, 2002, S. 1321). Angesichts der fehlenden Subadditivität verringert sich bei Portfoliodiversifikation das gemessene Risiko nicht zwangsläufig. Dies hat zur Folge, dass es bei einem Vergleich alternativer Portfolios zu unzutreffenden Einschätzungen des Risikos respektive zu irreführenden Präferenzen bei der Zusammensetzung eines Portfolios kommen kann (Meyer, 1999, S. 57).

Die Verletzung der Subadditivitätseigenschaft kann auf anschauliche Weise mit folgenden einfachen Beispielen nachgewiesen werden.

Beispiel 2. Betrachtet werden zwei Finanzpositionen X_1 und X_2, die im Allgemeinen normalverteilt sind, allerdings den gelegentlichen unabhängigen Schocks η ausgesetzt sind:

$$X_i = \epsilon_i + \eta_i, \quad \epsilon_i \overset{iid}{\sim} N(0,1), \quad \eta_i = \begin{cases} 0 \; mit\; Wahrscheinlichkeit\; 0.991 \\ -10 \; mit\; Wahrscheinlichkeit\; 0.009 \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Der 1% VaR für X_1 beträgt 3.1, da die Wahrscheinlichkeit, dass η gleich -10 ist, kleiner 1% ist. Er ist allerdings nur geringfügig höher als derjenige VaR unter der Annahme, dass die Schocks η nicht eintreten, welcher mit 2.3 gegeben ist. Die Finanzposition X_2 weist die gleiche Verteilung wie X_1 auf, bei Unabhängigkeit von X_1. Betrachtet wird nun ein gleich gewichtetes Portfolio, bestehend aus einer Einheit X_1 und einer Einheit X_2. In diesem Fall ist der 1% Portfolio VaR mit 9.8 gegeben, da für (X_1 + X_2) die Wahrscheinlichkeit, entweder X_1 oder X_2 η=-10 zu erhalten, größer als 1% ist.

$$VaR(X_1 + X_2) = 9.8 > VaR(X_1) + VaR(X_2) = 3.1 + 3.1 = 6.2$$

Es gilt, unter Berücksichtigung der allgemeinen Definition von Subadditivität, folglich:

$$VaR_{0.99}(X_1 + X_2) \geq VaR_{0.99}(X_1) + VaR_{0.99}(X_2),$$

sodass der VaR nicht subadditiv und folglich auch nicht kohärent ist. Dieses Beispiel ist besonders im Bereich Kreditrisiko von praktischer Relevanz. Kreditereignisse können hier durch den Ausgang -10 modelliert werden (Artzner et al., S. 216-218; Daníelsson et al., 2011, S. 5).

Beispiel 3. Man betrachte zwei unabhängige Finanzpositionen X_1 und X_2 mit α=0.5, wobei

$$X_i = \begin{cases} 1, & mit\; Wahrscheinlichkeit\; p = 0.5 \\ -1, & mit\; Wahrscheinlichkeit\; (1-p) = 0.5 \end{cases}$$

für i=1,2. Dann ist das kombinierte Portfolio gegeben durch

$$\frac{X_1 + X_2}{2} = \begin{cases} 1, & mit\; Wahrscheinlichkeit\; p \cdot p = 0.25 \\ 0, & mit\; Wahrscheinlichkeit\; 2 \cdot p(1-p) = 0.5 \\ -1, & mit\; Wahrscheinlichkeit\; (1-p)(1-p) = 0.25 \end{cases}$$

Der $VaR_{0.5}$ für die beiden einzelnen Finanzpositionen X_1 und X_2 ist gegeben durch $VaR_{0.5}(X_i)$=-1 für i=1,2; der $VaR_{0.5}$ für das Portfolio durch $VaR_{0.5}(\frac{1}{2}(X_1+X_2))$=0. Dies bedeutet, dass laut dem VaR das eigentlich diversifizierte Portfolio riskanter ist, verglichen zu den Einzelpositionen[30]. Es gilt somit

$$\frac{1}{2}VaR_{0.5}(X_1) + \frac{1}{2}VaR_{0.5}(X_2) = -1 \ngeq VaR_{0.5}(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2),$$

was jedoch das Axiom der Subadditivität verletzt.

Infolge der im vorherigen Abschnitt genannter Probleme aufgrund der fehlenden Kohärenz ist der VaR zur Steuerung des Risikos eines Bankportfolios nicht uneingeschränkt einsetzbar, allerdings hat sich das Konzept in der Praxis vor allem für die Quantifizierung des Kreditrisikos im Bankenwesen als Standard durchgesetzt. Ein nicht unwesentlicher Kritikpunkt bleibt dennoch die Tatsache, dass der VaR ausschließlich die Verlustwahrscheinlichkeit für einen maximalen Verlust aufzeigt und das Ausmaß potentieller Verluste, welche den VaR übersteigen, unberücksichtigt bleiben (Bertsimas, Lauprete & Samarov, 2004, S. 1354). Die Hauptgründe, welche gegen die Verwendung des VaR als Risikomaß sprechen, können praktisch am Beispiel 2 nachvollzogen werden und lauten:

(i) Die Verwendung des VaR bei addierten Risikopositionen führt zu suboptimalen Entscheidungen, selbst bei Unabhängigkeit dieser Einzelrisiken. Gerade die für die Bank gefährlichen Extremszenarien werden bei Verwendung des VaR nicht ausreichend quantifiziert.

(ii) Die Verwendung des VaR unterstützt nicht oder verhindert sogar in gewissen Situationen Diversifikation[31].

(iii) Die Verwendung des VaR kontrolliert nur die Wahrscheinlichkeit eines Verlusts, aber nicht dessen Größe, falls er eintritt.

Ein großer Vorteil gegenüber diversen anderen Risikomaßen ist allerdings, dass der VaR als dasjenige Kapital interpretiert werden kann, welches für eingegangene Risiken zu hinterlegen ist. Das ökonomische Risiko lässt sich somit direkt messen, da mögliche unerwartete Verluste in Geldeinheiten ausgedrückt werden können (Jochusch, 2002, S. 39; Wilson, 1999, S. 65; Albrecht, 2003, S. 29; Artzner et al., 1999, S. 218).

5.2.3 Expected Shortfall

Der Expected Shortfall (ES), auch Conditional Value at Risk genannt, wurde 1997 von Artzner et al. als kohärentes Risikomaß eingeführt und gehört, wie der VaR auch, zu den Downside-Risikomaßen. Er wird definiert als der erwartete Verlust für den Fall, dass der

[30] *Anmerkung:* Für ein hohes α kann der $VaR_\alpha(X)$ auch negativ sein. Dann entspricht dieser Wert einem Gewinn und keinem Verlust (Kriele & Wolf, 2012, S. 22).

[31] Von Diversifikation spricht man, wenn Vermögen nicht vollständig in eine Einzelfinanzposition fließt, sondern auf unterschiedliche Anlageformen verteilt wird und diese zu einem Portfolio kombiniert werden. Dadurch soll eine Risikoreduktion erreicht werden. Die so gewonnene Vermögensstruktur hat insgesamt ein geringeres Risiko als die jeweiligen Einzelpositionen. Mit Hilfe des Axioms der Subadditivität wird der Diversifikationseffekt berücksichtigt.

VaR tatsächlich überschritten wird, d.h. es werden nur solche Verluste betrachtet, die über den VaR hinausgehen. Der ES kann demzufolge als wahrscheinlichkeitsgewichteter Durchschnitt aller Verluste, die den VaR übersteigen, gesehen werden (Artzner et al., 1997; Yamai & Yoshiba, 2002, S. 58).

Definition 19. *Expected Shortfall.* Sei X eine Zufallsgröße, die das künftige Endvermögen einer Finanzposition repräsentiert und sei VaR^{α} der Value-at-Risk für ein Konfidenzniveau von α. Der Expected Shortfall zum Konfidenzniveau $\lambda \in (0,1)$ einer Position ist definiert als

$$ES_{\lambda}(X) = \frac{1}{\lambda} \int_{0}^{\lambda} VaR_{\alpha}(X) d\alpha.$$

Eine äquivalente Darstellung unter Verwendung obiger Definition von q_X^+ ist

$$ES_{\lambda}(X) = -\frac{1}{\lambda} \int_{0}^{\lambda} q_X^+(\alpha) d\alpha$$

(Albrecht & Koryciorz, 2003, S. 4; Frey & McNeil, 2002, S. 1320; Yamai & Yoshiba, 2002, S. 88).

Betrachtet man den VaR als Maximalschaden, welcher mit einer Wahrscheinlichkeit von 1-α nicht überschritten wird, kann der ES als durchschnittlicher Maximalschaden in α% der ungünstigsten Ausprägungen der Verlustverteilung aufgefasst werden (Acerbi & Tasche, 2002a, S. 1488; Albrecht, 2003, S. 31). Da der Expected Shortfall das Kreditrisiko in Geldeinheiten misst, gilt er als leicht zu interpretierendes Risikomaß und kann zudem theoretisch als notwendiges zu hinterlegendes Risikokapital aufgefasst werden (Albrecht, 2003, S. 33).

Der Expected Shortfall gilt aufgrund seiner Eigenschaften der positiven Homogenität sowie der Subadditivität als konvexes Risikomaß. Da gleichzeitig auch die Anforderungen der Monotonie und der Translationsinvarianz erfüllt werden, stellt diese Kennzahl somit ein kohärentes Risikomaß dar und kann folglich laut Artzner et al. zur Risikomessung eingesetzt werden[32](Rockafellar & Uryasev, 2000, S. 22; Theiler, 2002, S. 82). Ein nicht unwesentlicher Kritikpunkt am Expected Shortfall sowie am Value-at-Risk bleibt allerdings die Tatsache, dass verschiedene zugrunde Verteilungsannahmen des künftigen Endvermögens X verschiedene Ergebnisse liefern[33]. Ferner sei auch anzumerken, dass der Expected Shortfall, im Vergleich zum VaR, weitaus empfindlicher auf die jeweilige Form der Verteilung in den 'tails' reagiert. Da Extremereignisse, insbesondere deren absolute Höhe, die 'tails' einer Verteilung formen, beeinflussen deren konkreten Ausprägungen sehr stark den errechneten Wert des ES (Zikovic, 2008, S. 5; Strub & Baker, 2011, S. 60).

[32]Auf den mathematischen Beweis der Eigenschaften wird an dieser Stelle verzichtet. Es sei jedoch verwiesen auf Kriele & Wolf, 2012, S. 39.

[33]Für eine detaillierte Übersicht verschiedener Verteilungsannahmen bei Verwendung des ES sei verwiesen auf Schmidli, 2009, S. 10-12.

Das Basler Ausschuss für Bankenaufsicht reformierte im Jahre 2013 den bisherigen Ansatz zur Messung allen voran des Marktrisikos, der bisher alleinig auf dem Konzept des VaR basierte, indem der Expected Shortfall als neues Risikomaß zugelassen wurde. Ziel war die Schwächen des VaR zu beseitigen und eine adäquatere Risikokennzahl einzuführen. Der ES mag zwar den Nachteil der fehlenden Kohärenz des VaR und somit die Problematik des Diversifikationseffekts umgehen. Vor dem Hintergrund eben genannter Schwachstellen ist allerdings auch dieses Maß nicht uneingeschränkt anwendbar, gerade bei extremen Kredit- oder Marktereignissen.

6 Schluss

Die vorliegende Arbeit befasste sich kritisch mit der herkömmlichen Modellierung von Unsicherheiten sowohl mit klassischen Wahrscheinlichkeiten als auch mit alternativen Konzepten zum Umgang mit Unsicherheit. Da diese Konzepte zunehmend auch im Bereich Finanzwirtschaft an Bedeutung gewinnen, erfolgte eine Anwendung dieser auf den Terminus der Risikomaße. Dabei konnte gezeigt werden, dass Ansätze zur Kohärenz aus dem Bereich der nicht-klassischen Wahrscheinlichkeiten, allen voran jene von 'imprecise previsions', auch auf Risikomaße übertragen werden können, sodass bei diesen ebenfalls die Eigenschaft der Kohärenz nachgewiesen werden kann.

Einleitend erfolgte zunächst die Beschreibung mehrerer alternativer Ansätze, um Risikomaße zu definieren. Dabei konnte sowohl mathematisch, ökonomisch als auch über den Ansatz eines akzeptablen zukünftigen Endvermögens argumentiert werden. Ein Risikomaß für eine nicht akzeptable Finanzposition ist demnach das Mindestkapital, welches in ein Referenzinstrument investiert werden sollte, sodass der zukünftige Wert dieser Position akzeptabel wird. Die Menge der akzeptablen zukünftigen Finanzpositionen wurden dabei charakterisiert durch eine Reihe von Axiomen, die diese Mengen erfüllen sollten.

Im Anschluss daran lag der Fokus auf den von Artzner et al. entwickelten vier Kohärenz-Axiomen für Risikomaße. Ein kohärentes Risikomaß, definiert auf einer beliebigen Menge von Risiken, konnte dabei als ein Spezialfall von kohärenter 'upper prevision' gesehen werden. Die Grundlage hierfür bildete die Interpretation von Risiko als Wette. Darauf aufbauend wurden die Definitionen von Konsistenz und Kohärenz für 'imprecise previsions' eingeführt und auf Risikomaße übertragen. Die anschließende Betrachtung von Risikomaßen im linearen Raum dient als Grundlage für die Herleitung der vier Axiome von Artzner et al., die ein Risikomaß erfüllen muss, sodass es als kohärent angesehen werden kann. Es konnte jedoch eine eindeutige Beziehung zwischen den Axiomen für Risikomaße und denen für die Akzeptanzmengen aufgezeigt werden. Abschließend wurden zwei Verfahren beschrieben, um nicht-kohärente Risikomaße in kohärente zu transformieren.

Allerdings sind die vier Kohärenz-Axiome nicht einschränkend genug, um DAS 'beste' Risikomaß angeben zu können. Die Entscheidung, welches Risikomaß nun konkret verwendet zu verwenden ist, sollte auch immer im Kontext der jeweiligen wirtschaftlichen Situation sowie dem zu messenden Risiko getroffen werden.

Literatur

Acerbi, C., Nordio, C. & Sirtori, C. (2001). Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management (Working Paper).
URL: http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0102304.pdf

Acerbi, C. & Tasche, D. (2002). *On the Coherence of Expected Shortfall*. In: Journal of Banking & Finance, 26 (2002) 7, 1487 – 1503.

Albrecht, P. (2003). Zur Messung von Finanzrisiken (Working Paper).
URL: https://ub-madoc.bib.uni-mannheim.de/210/1/MAMA03.pdf

Artzner, P., Delbaen, F., Eber,J. & Heath, D. (1991). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, Volume 9 (3), 203 – 228.

Bertsimas, D. J., Lauprete, G. J. & Samarov, A. (2004). *Shortfall as a risk measure: properties, optimization and applications*. In: Journal of economic dynamics control, 28 (2004) 7, 1353 – 1381.

Casualty Actuarial Society (CAS). Dynamic Risk Modeling Handbook. Kapitel 9
URL: http://www.casact.org/research/drm/drm_handbook.pdf

Coolen, F. P. A., Troffaes, M. C. M. & Augustin, T. (2010). Imprecise Probability. *International Encyclopedia of Statistical Science.* Berlin: Springer.

Daníelsson, J. & Jorgensen, B. (2005). *Subadditivity Re-Examined: the Case for Value-at-Risk.*
URL: http://www.riskresearch.org/files/JD-Cd-BJ-SM-GS-35.pdf

de Finetti, B. (1974). *Theory of Probability*, Volume 1. London: Wiley.

Frey, R. & McNeil, A. J. (2002). *VaR and expected shortfall in portfolios of dependent credit risks: conceptual and practical insights*. In: Journal of banking & finance, 26, 7, 1317 – 1334.

Goovaerts, M., Kaas, R. & Dhaene, J. (2002). Economic Capital Allocation Derived from Risk Measures (Working Paper).
URL: http://www.econ.kuleuven.ac.be/public/ndbaa95/pdfs/398.pdf

Hahn, C., Pfingsten, A. & Wagner, P. (2001). Assessing the risk of trading books empirically: does the choice of a risk measure matter? In: Buhl, H. U., Kreyer, N. & Steck, W. (Hrsg.). *e-Finance*. Berlin: Springer.

Hartmann-Wendels, T., Pfingsten, A. & Weber, M. (2000). *Bankbetriebslehre*, 2. Auflage. Berlin: Springer.

Jorion, P. (2001). *Value at Risk: the new benchmark for managing financial risk*, 2. Auflage. New York: Mcgraw-Hill.

Kriele, M. & Wolf, J. (2012). *Wertorientiertes Risikomanagement von Versicherungsunternehmen*. Berlin: Springer.

Meyer, C. (1999). *Value at Risk für Kreditinstitute: Erfassung des aggregierten Marktrisikopotentials*. Wiesbaden: Springer.

Miranda, E. (2007). *An introduction to the theory of coherent lower previsions.*
URL: http://www.sipta.org/isipta07/miranda.pdf

Oehler, A. & Unser, M. (2002). *Finanzwirtschaftliches Risikomanagement* (2. Auflage). Berlin: Springer.

Ott, S. C. (2005). *Risiko und Stochastische Dominanz.* Universität St. Gallen, Hochschule für Wirtschafts-, Rechts- und Sozialwissenschaften (HSG), Dissertation Nr. 2990.

Pelessoni, R. & Vicig, P. (2003). Imprecise Previsions for Risk Measurement. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems*, Volume 11, No. 4, 393 – 412.

Rockafellar, R. T. & Uryasev, S. (2000). *Optimization of Conditional Value-at-Risk*. In: Journal of Risk, 2 (2002) 3; 21 – 41.

Schmidli, H. (2009). *Quantitatives Risikomanagement: Grundlegende Konzepte des Risikomanagements.* Seminar.
URL: http://www.mi.uni-koeln.de/~jeisenbe/Vortrag1.pdf

Schulte, M. & Horsch, A. (2002). *Wertorientierte Banksteuerung II: Risikomanagement*. Frankfurt am Main: Frankfurt School Verlag.

Strub, I. S. & Baker, E. D. (2011). *Downside Risk Management in Emerging Markets.* In: The Journal of Investment Consulting, Volume 12, No. 1, 60 – 66.

Theiler, U. (2002). *Optimierungsverfahren zur Risk-, Return-Steuerung der Gesamtbank*. Wiesbaden: Deutscher Universitätsverlag.

Toutenburg, H. & Heumann, C. (2006). *Deskriptive Statistik: Eine Einführung in Methoden und Anwendungen mit SPSS.* Berlin: Springer.

Vicig, P. (2008). Financial Risk Management with imprecise probabilities. In: International Journal of Approximate Reasoning, Volume 49, 159 – 174.

Walley, P. (1991). *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*. London: Chapmann and Hall.

Wehrspohn, U. (2001). *Standardabweichung und Value at Risk als Maße für das Kreditrisiko*. In: Die Bank (2001), 8, 582 – 588.

Weichselberger, K. (2001). *Elementare Grundbegriffe einer allgemeineren Wahrscheinlichkeitsrechnung I*. Heidelberg: Physika.

Wilson, T. C. (1999). Value at Risk. In: Alexander, C. (Hrsg.): *Risk Management and Analysis – Volume I: Measuring and Modeling Financial Risk*, Chichester, 1999, 61 – 124.

Yamai, Y. & Yoshiba, T. (2002). Comparative analyses of expected shortfall and value-at-risk: Their estimation error, decomposition, and optimization. In: *Monetary and economic studies*, 20 (2002) 1, 87 – 121.

Zikovic, S. (2008). *Friends or Foes: A story of Value at Risk and Expected Tail Loss.* Young Economists' Seminar to 14th Dubrovnik Economic Conference.
URL: http://www.hnb.hr/dub-konf/14-konferencija/young-zivkovic-2.pdf