

Seminararbeit im Seminar:
Wahrscheinlichkeit und andere Unsicherheitskonzepte
Wintersemester 2013/2014
07.05.2014

Subjektive Intervallwahrscheinlichkeiten
Einbindung in den philosophischen Diskurs des
Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Autor: Jonathan Geßendorfer
Betreuer: Dipl.-Math. Georg Schollmeyer

AG Method(olog)ische Grundlagen der Statistik und ihre Anwendungen
Institut für Statistik
Ludwig-Maximilians-Universität
Ludwigstraße 33
80539 München

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Philosophische Wahrscheinlichkeitsinterpretationen	3
2.1	Klassische und Logische Wahrscheinlichkeitsinterpretation . . .	4
2.2	Frequentismus	7
2.3	Subjektive Wahrscheinlichkeit	8
3	Ungewissheit und subjektive Intervallwahrscheinlichkeiten	12
4	Kohärente Upper und Lower Previsions und Probabilities	14
4.1	Upper and Lower Previsions	15
4.2	Rationalitätskriterien für lower und upper Previsions	16
4.2.1	Avoiding Sure Loss	16
4.2.2	Kohärenz	18
4.3	Lower and Upper Probabilities	20
5	Imprecise Dirichlet Model	21
6	Fazit	25

1 Einleitung

Das Institut für Statistik an der Ludwig-Maximilians-Universität München stellt Statistik vor als „[...] angewandte Disziplin, deren Hauptaufgabe in der Entwicklung von Modellen und Methoden zur Datenanalyse besteht. Diese führen in verschiedenen Bereichen der empirischen Forschung zu gesicherten Erkenntnissen[...].“¹ Die Statistik stellt also einen Teil der Regeln auf wie in empirischen Wissenschaften Erkenntnis gewonnen wird. Es wird schnell offensichtlich, dass Statistik stark in Verbindung steht, oder zumindest stehen sollte, mit philosophischer Erkenntnis- und Wissenschaftstheorie.

Eine der zentralen Aufgaben der Statistik ist die Quantifizierung von Unsicherheit gegenüber dem Wahrheitsgehalt von (mithilfe von statistischen Modellen gewonnenen) empirischen Sätzen. Notwendige Voraussetzung um die Statistik sinnvoll wissenschaftstheoretisch zu untermauern ist deshalb eine Philosophie der Unsicherheit zu betreiben.

Gerade der Wahrscheinlichkeitsbegriff - das wohl zentralste Unsicherheitskonzept - wird philosophisch sehr kontrovers diskutiert. Diese Arbeit macht es sich zur Aufgabe den Beitrag von Peter Walleys subjektive Intervallwahrscheinlichkeiten zu diesem Diskurs herauszuarbeiten. Dazu werden zunächst (2.) die wichtigsten, und für diese Arbeit relevanten Beiträge zum philosophischen Diskurs des Wahrscheinlichkeitsbegriffs kurz beschrieben. Am wichtigsten und deswegen im besonderen Fokus in diesem Gliederungspunkt ist Bruno de Finettis subjektive Wahrscheinlichkeitsinterpretation. In (3.) wird mithilfe des Begriffs der Ungewissheit versucht zu veranschaulichen, warum die einfachen subjektiven Wahrscheinlichkeiten unterkomplex sind um den Anforderungen de Finettis zu genügen und aufgezeigt, warum Intervallwahrscheinlichkeiten dies besser leisten können. Es folgt (4.) eine formale Herleitung von subjektiven Intervallwahrscheinlichkeiten über das allgemeinere Unsicherheitskonzept upper/lower Previsions. In (5.) wird veranschaulicht, dass

¹URL: <http://www.stat.uni-muenchen.de/studium/studieninfos/studieninfos.html>
Stand: 07.05.2014

Intervallwahrscheinlichkeiten in der subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie nicht nur inhaltlich sinnvoller als Punktwahrscheinlichkeiten sind, sondern für multinomiale Modelle auch ein großes Problem der Bayesstatistik lösen kann: die Schwierigkeit eine sinnvolle, nicht-informative Prioriverteilung aufzustellen.

2 Philosophische Wahrscheinlichkeitsinterpretationen

Wahrscheinlichkeitstheorie hat einen mathematischen und einen philosophischen Aspekt. Die mathematische Formulierung von Wahrscheinlichkeit beruht auf den Axiomen von Kolmogorov: Sei (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Mit Ergebnismenge Ω , Ergebnisraum $\Sigma \subset \Omega$ und einer Abbildung P von Σ nach $[0,1]$. Das Bild der Abbildung ist eine Wahrscheinlichkeit, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

1. (non-negativity) $P(E) \geq 0, \forall E \subset \Sigma$
2. (unit measure) $P(\Omega) = 1$
3. (σ -additivity) $P(E_1 \dot{\cup} E_2 \dot{\cup} E_3 \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$

Über den mathematischen Aspekt der Wahrscheinlichkeitstheorie herrscht großer Konsens. Die Gültigkeit der Kolmogorovschen Axiome folgt auch (zumindest für endliche Additivität) aus den meisten philosophischen Wahrscheinlichkeitsinterpretationen². Der Diskurs über die Auslegung dieser Axiome ist dagegen von unterschiedlichsten Interpretationen dominiert.

Subjektive Intervallwahrscheinlichkeiten nach Walley sind eine Verallgemeinerung der subjektiven Punktwahrscheinlichkeiten von de Finetti. De Finettis

²Bei Intervallwahrscheinlichkeiten kann, wie später gezeigt wird, die Axiomatik allerdings nicht aufrecht erhalten werden.

Wahrscheinlichkeitsbegriff ist geprägt von einem philosophischen Verständnis, das sich von der klassischen/logischen und der frequentistischen Sicht auf den Begriff der Wahrscheinlichkeit stark abgrenzt. Dieser Gliederungspunkt soll für diese Arbeit relevante Ausschnitte des philosophischen Diskurs über den Wahrscheinlichkeitsbegriff kurz veranschaulichen. In (3.) soll gezeigt werden wie Walley mit dem Begriff der subjektiven Intervallwahrscheinlichkeiten an diesen Diskurs anschließt.

2.1 Klassische und Logische Wahrscheinlichkeitsinterpretation

„The theory of chance consists in reducing all the events of the same kind to a certain number of cases equally possible, that is to say, to such as we may be equally undecided about in regard to their existence, and in determining the number of cases favorable to the event whose probability is sought. The ratio of this number to that of all the cases possible is the measure of this probability, which is thus simply a fraction whose numerator is the number of favorable cases and whose denominator is the number of all the cases possible.“ (Laplace 1902: 6f)

In der Laplace'schen Wahrscheinlichkeitstheorie wird in Situationen ohne Vorwissen, Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet. Dabei gilt, dass verschiedenen Ereignissen, die sich nur durch ihrem Namen voneinander unterscheiden, dieselbe Wahrscheinlichkeit zugeordnet wird. Die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse soll gleichmäßig auf gleichartige, disjunkte Ereignisse aufgeteilt werden. Ein klassisches Beispiel ist der Wurf einer Münze. Das Ereignis Kopf und das Ereignis Zahl sind gleichartig, deshalb werden ihnen, wenn keine weitere (oder symmetrische) Evidenz besteht, die Wahrscheinlichkeiten $P(\text{Kopf}) = 1/2$ und $P(\text{Zahl}) = 1/2$ zugeordnet.

Keynes formuliert in *A Treatise on Probability* (1921) das Indifferenzprinzip, das auf Laplace' Verständnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zurückzuführen

ist:

„The Principle of Indifference asserts that if there is no known reason for predicating of our subject one rather than another of several alternatives, then relatively to such knowledge the assertions of each of these alternatives have an equal probability.“(Keynes 1921: 42)

Das Indifferenzprinzip besagt also, dass in Situationen ohne Evidenz eine Gleichverteilung über die möglichen Ergebnisse eines Experiments angenommen werden soll.

Es wird schnell offensichtlich, dass diese Wahrscheinlichkeitstheorie, zumindest in dieser Form, sehr schnell an Grenzen stößt. Wann sind Ereignisse gleichartig (events of the same kind)? Was für eine Wahrscheinlichkeit wird zugeordnet, wenn nicht alle Ereignisse gleichartig sind? Also etwa, wenn wir für den Münzwurf die möglichen Ereignisse *Kopf*, *Zahl*, *Kante* betrachten. Wie werden in einem Experiment mit unendlich vielen möglichen Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet? ³

Außerdem bleibt zu klären wann wir gegenüber Ereignissen *equally undecided* sind. Man könnte auf den ersten Blick denken, dass Laplace diese Unentschiedenheit als subjektiv versteht. Der Akteur scheint entscheiden zu können, ob er *equally undecided* ist oder nicht. Wenn er dies kann, kann er auch subjektiv entscheiden, ob er allen Ereignissen die selbe Wahrscheinlichkeit zuschreibt oder nicht. Es würde sich also um einen subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff handeln. Tatsächlich war aber Laplace' Intention eine *logische* (und deshalb objektive) „Anleitung“ wie Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zuzordnen sind zu schaffen. Das heißt Laplace nimmt an, dass alle rationalen Akteure, bei Fehlen von Evidenz, auf diese Weise Wahrscheinlichkeiten zuordnen. (vgl.

³Ein weiteres Problem ist, dass eine Beurteilung von Ereignissen als „equally possible“ und Ereignissen dieselbe Wahrscheinlichkeit zuzuordnen eigentlich identisch sind, das heißt die Anleitung von Laplace zirkulär.

Gillies 2000)

Einen allgemeineren Begriff von Wahrscheinlichkeit liefert die logische Wahrscheinlichkeitsinterpretation. Diese Theorie geht auf die Philosophie in Cambridge Anfang des 20. Jahrhunderts, insbesondere John Maynard Keynes zurück.

In der deduktiven Logik kann eine Konklusion aus Prämissen hergeleitet werden. Dabei hat mindestens eine der Prämissen die Form einer Allaussage, etwa: *Alle Menschen sind Philosophen*. Beobachten wir nun Aristoteles und seine Eigenschaft (sein Prädikat) ein Mensch zu sein, so können wir logisch schließen, dass Aristoteles ein Philosoph ist. Induktiv, also auf der Basis von Einzelbeobachtungen statt einer Allaussage, ist ein Schluss wie dieser aber nie endgültig möglich. Das Induktionsproblem besagt, dass auf der Basis von Einzelbeobachtungen nie auf eine allgemeine Gesetzesaussage schließen können. Das heißt, selbst wenn wir Tausende Menschen beobachten und alle Philosophen sind, können wir nicht logisch auf die Wahrheit der Allaussage *Alle Menschen sind Philosophen* schließen und das heißt wiederum, dass nicht mit Sicherheit gesagt werden kann, dass Aristoteles ein Philosoph ist. Es spricht aber viel dafür, dass wir diesen Schluss mit größerer Sicherheit ziehen können, je mehr Menschen wir beobachtet haben, die Philosophen sind. Wahrscheinlichkeitstheorie kann als Teilbereich der Logik verstanden werden. Genauer: Wahrscheinlichkeitstheorie soll rationale Regeln für induktive Schlüsse liefern. (vgl. Gillies 2000: 29ff)

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit wird als Grad der Bestätigung eines logischen Schlusses auf der Basis von endlich vielen Beobachtungen betrachtet. Auch für Wahrscheinlichkeit im Sinne von Keynes gilt, dass dieser Bestätigungsgrad nicht subjektiv ist. Er schreibt explizit:

„[...] in the sense important to logic probability is not subjective. [...] When once the facts are given which determine our knowledge, what is probable or im-

probable in these circumstances has been fixed objectively, and is independent of our opinion. The theory of probability is logical, therefore it is concerned with the degree of belief which it is *rational* to entertain in given conditions, and not merely with the actual beliefs of particular individuals, which may or may not be rational.“(Keynes 1921: 4)

Dabei soll dieser Grad der Bestätigung, da er induktiv logisch aus Daten hergeleitet wird, für alle rationalen Akteure der Gleiche sein. Die logische Wahrscheinlichkeit ist also vom Subjekt unabhängig. Dabei müssen Wahrscheinlichkeiten außerdem nicht präzise sein. Von Keynes stammt die erste Theorie impräziser Wahrscheinlichkeiten. (vgl. Walley 1991: 44)

2.2 Frequentismus

Von Mises - ein Philosoph des Wiener Kreises - beschreibt den Gegenstandsbereich der Wahrscheinlichkeitstheorie folgendermaßen: „[. . .]probability theory deals with mass phenomena and repetitive events.“(Von Mises 1950: vii in Gillies 2000: 89)

Formal ist Wahrscheinlichkeit im Frequentismus definiert als Grenzwert der Folge relativer Häufigkeiten eines Ereignisses in einem wiederholbaren Experiment. Das heißt, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, objektiv vorhanden ist. Es existiert also eine wahre Wahrscheinlichkeit und sie ist eine dem Experiment inherente, naturgegebene Eigenschaft. Wären wir in der Lage, eine Münze unendlich oft (auf die selbe Art und Weise) zu werfen, ist die relative Häufigkeit des Ereignisses *Kopf* die wahre Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

Ein großes Problem für den Frequentismus ist, dass sich der frequentistische Wahrscheinlichkeitsbegriff, wie schon im obigen Zitat offensichtlich wird, auf wiederholbare Experimente beschränkt. Diese Wiederholbarkeit ist aber in der Wirklichkeit nicht gegeben. Selbst das Experiment eines Münzwurfs kann

nicht identisch wiederholt werden, da nicht alle, den Wurf potentiell bestimmenden, Variablen konstant gehalten werden können - man denke etwa an die Zeit. Das heißt die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in einem einzelnen, empirisch vorliegendem Experiment kann nicht approximiert werden, da das Experiment nicht wiederholt werden kann. Stattdessen wird von der Realität abstrahiert und versucht die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis in einem empirisch vorliegenden Experiment, über eine große Menge, durch Abstraktion als gleich bezeichnete, Experimente zu approximieren.

Der frequentistische Wahrscheinlichkeitsbegriff verlangt *unendlich viele* Wiederholungen des gleichen Experiments, alles was möglich ist, ist aber eine *endliche* Anzahl Ergebnisse *unterschiedlicher* Experimente zu beobachten. Ersteres ist ein abstraktes Konzept, zweiteres ein empirisches. Es wird also versucht empirische Phänomene über abstrakte Konzepte zu beschreiben - eine Vermischung die nicht unproblematisch ist.⁴

2.3 Subjektive Wahrscheinlichkeit

Im scharfen Kontrast zu den vorher geschilderten philosophischen Interpretationen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs steht de Finettis subjektive Wahrscheinlichkeit. Im Vorwort von *Theory of Probability* schreibt er:

„My thesis, paradoxically, and a little provocatively, but nonetheless genuinely, is simply this:

PROBABILITY DOES NOT EXIST.

The abandonment of superstitious beliefs about the existence of Phlogiston, the Cosmic Ether, Absolute Space and Time, . . . , or Fairies and Witches, was an essential step along the road to scientific thinking. Probability, too, if regarded as something endowed with some kind of objective existence, is no less a

⁴Eine längere Diskussion dieser Problematik würde den Rahmen dieser Arbeit überschreiten. Siehe dazu Gillies 2000: Kapitel 5

misleading misconception, an illusory attempt to exteriorize or materialize our true probabilistic beliefs.“(de Finetti 1970: x)

Objektive Wahrscheinlichkeit existiert für de Finetti nicht. Vorstellungen davon sind metaphysisch und müssen verabschiedet werden.

Man sieht schnell, dass diese Kritik, wenn nicht unbedingt auf den frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff von Von Mises bezogen, auf jeden Fall auf diesen anwendbar ist. Der metaphysische Charakter des frequentistischen Verständnis von Wahrscheinlichkeit ist, wie im letzten Unterpunkt gezeigt, schwer von der Hand zu weisen.

Auch wenn de Finetti - im Gegensatz zu Ramsey - sich nicht explizit von Keynes logischer Interpretation abgrenzt, sind die philosophischen Vorstellung stark unterschiedlich. Bei Keynes wird angenommen, dass rationale Akteure, falls sie dieselben Daten zur Verfügung haben, denselben Grad des Glaubens an einen induktiven Schluss haben. Die Vorstellung des aus Rationalität resultierenden Konsens - und damit der Objektivität - wird in der subjektiven Theorie verworfen. (vgl. Gillies 2000: 52f)

Wahrscheinlichkeit meint in der subjektiven Interpretation: *subjektiver Grad des Glaubens* rationaler Akteure an das Eintreffen eines bestimmten Ereignisses. Sowohl bei de Finetti, als auch bei Ramsey soll dieser Glaubensgrad mithilfe von Wetten gemessen werden (vgl. Gillies: 2000: 54). Der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff eines Akteurs wird also über dessen Wettverhalten definiert. Das heißt es wird angenommen, dass eine Äquivalenz von Glauben und Wettverhalten besteht.

Bruno de Finetti (1981) setzt die subjektive Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E gleich mit dem Gefühl von Rechtfertigung für die Größe der Einzahlung für eine Wette, in der man bei Eintreten dieses Ereignisses 100 Lire ausbezahlt bekommt. Scheint es für den Akteur gerechtfertigt 5 Lire einzusetzen entspricht dies einer subjektiven Wahrscheinlichkeit von $P(E) = 0,05$.(vgl.

de Finetti 1981: 224f)⁵

Etwas allgemeiner formuliert: Der Akteur wählt einen Wettquotient q , den er als fair für eine Wette auf ein Ereignis E ansieht. Subjektiv fair heißt, dass er jede Wette annehmen würde, für die er qS einzahlen muss und S ausgezahlt bekommt, wenn E eintritt und nichts bekommt, wenn E nicht eintritt. S darf dabei sowohl negativ als auch positiv sein, das heißt der Akteur muss bereit sein für den Preis qS die Wette sowohl zu kaufen als auch zu verkaufen. Der Wettquotient q entspricht dem Grad des Glaubens an das Ereignis E , also der subjektiven Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von E . (vgl. Gillies 2000: 55)

Es gibt einen großen Nachteil für S - den Stake - Geldeinheiten zuzulassen: die Nichtlinearität des Nutzens von Geld. Gillies argumentiert, dass unter der Voraussetzung, dass S im Verhältnis zum Vermögen des Akteurs weder zu groß noch zu klein ist, der Glaubensgrad sinnvoll gemessen werden kann (vgl. Gillies 2000: 56f). Durch diese Einschränkung von S wird aber nicht die Differenz von qS und S berücksichtigt. Zum Beispiel kann, wenn q hinreichend klein ist, eine Einzahlung im Verhältnis zur potentiellen Auszahlung irrelevant klein sein, das heißt der Akteur würde die Wette jederzeit für qS kaufen. Wenn er die Wette aber verkaufen soll bekommt er nur eine irrelevant kleine Summe hat aber das Risiko sehr viel Auszahlen zu müssen - er würde die Wette also nicht verkaufen, was der Definition von q widerspricht. Um Linearität zu gewähren dürfen weder qS noch S zu klein oder zu groß im Verhältnis zum Gesamtvermögen des Akteurs sein. Ob man ein S findet, mit dem dies sowohl für S als auch für qS gilt, ist aber abhängig von q .

Sowohl Ramsey, als auch de Finetti in seinen späteren Arbeiten, lehnen es ab S in Geldeinheiten zuzulassen (vgl. ebd.). Man kann aber nicht abstreiten, dass die Konstruktion einer linearen Nutzenskala, die tatsächlich als Stake genutzt werden kann, auch nicht unproblematisch ist. Peter Walley (vgl.

⁵Es handelt sich allerdings nur um Wahrscheinlichkeiten, wenn es die Gefühle von Rechtfertigung rationaler Akteure sind. Dazu im Folgenden mehr.

Walley 1991: 58f) liefert eine elegante Lösung: für S wird eine Wahrscheinlichkeitswährung konstruiert: Es gibt einen für den Akteur wertvollen Preis zu gewinnen. Nach den Wetten wird aus einer $\text{Bin}(1, \pi)$ Verteilung gezogen, realisiert sich eine 1 erhält er den Preis. Vor der Ziehung legt der Akteur einen Wettquotient q für ein Ereignis E fest. Wenn E eintritt ist $\pi = 0.5 + S$, falls nicht wird $\pi = 0.5 - qS$. Das heißt er erhält den Preis wahrscheinlicher (im Sinne eines größeren Erwartungswerts der Zufallszahl, die aus $\text{Bin}(1, \pi)$ gezogen wird), wenn er die Wette gewinnt. Die Linearitätsannahme gilt, wenn der Nutzen linear mit der Wahrscheinlichkeit den Preis zu erhalten steigt. Dies scheint zumindest verhältnismäßig plausibel, da zumindest der erwartete Nutzen linear mit π steigt ($E(X) = \pi$ gilt für $X \sim \text{Bin}(1, \pi)$).

De Finetti schreibt im Vorwort von *Theory of Probability* weiter:

„In investigating the reasonableness of our own modes of thought and behaviour under uncertainty, all we require, and all that we are reasonably entitled to, is consistency among these beliefs, and their reasonable relation to any kind of relevant objective data [...]. This is Probability Theory.“ (de Finetti 1970: x)

Wahrscheinlichkeitstheorie soll sich also mit der Konsistenz der Überzeugungen eines Akteurs beschäftigen. De Finetti bezieht sich hier auf seinen Begriff der Kohärenz. Wettquotienten für Ereignisse E_1, \dots, E_n eines Akteurs sind genau dann kohärent, wenn es keine Stakes S_1, \dots, S_n gibt mit denen es für einen potentiellen Gegner möglich wäre dem Akteur Wetten abzukaufen und an ihn zu verkaufen, so dass der Akteur unabhängig vom Eintritt der Ereignisse immer Verlust macht. Eine solche Kombination von Wetten wird als Dutch Book bezeichnet. (vgl. Gillies 2000: 58) Es kann gezeigt werden, dass Wettquotienten genau dann kohärent sind, wenn sie die Wahrscheinlichkeitsaxiome nach Kolmogorov, mit endlicher Additivität erfüllen. (vgl. Gillies 2000: 59ff)

Kohärenz bezeichnet ein Rationalitätskriterium - es ist irrational, wenn man sich für potentielle Dutch Books anfällig macht. Da die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E definiert wurde als *subjektiver Grad des Glaubens* rationaler Akteure an das Eintreffen von E, sind kohärente Wettquotienten Wahrscheinlichkeiten.

3 Ungewissheit und subjektive Intervallwahrscheinlichkeiten

Um subjektive Intervallwahrscheinlichkeiten zu motivieren, ist es sinnvoll die Unsicherheitskonzepte der Entscheidungstheorie einzuführen. Hier wird unterschieden zwischen Entscheidungen unter *Risiko* und Entscheidungen unter *Ungewissheit*. Bei Entscheidungen unter Risiko sind die möglichen Umweltzustände und die jeweiligen Eintrittswahrscheinlichkeiten für diese Umweltzustände bekannt. Ungewissheit besteht dagegen, wenn zwar die möglichen Umweltzustände bekannt sind, aber die Eintrittswahrscheinlichkeiten unbekannt sind.

Frank Knight (1921) führt zusätzlich das Konzept der *vollkommenen Unsicherheit* ein - Entscheidungen müssen unter vollkommener Unsicherheit getroffen werden, wenn der Ergebnisraum, also die möglichen Umweltzustände, unbekannt sind - was aber erst in (5.) von Relevanz sein wird.

Subjektive Punkt-Wahrscheinlichkeiten können Risiko modellieren. Dass die Eintrittswahrscheinlichkeiten subjektiv sind stellt dabei formell kein Problem dar - man kann sagen, jeder Akteur *weiß* seine eigene subjektive (Punkt)-Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses (Umweltzustandes).

Ziel von subjektiver Wahrscheinlichkeitstheorie ist allerdings nach de Finetti: „[...] investigating the reasonableness of our own modes of thought and behaviour under uncertainty[...]“ (de Finetti 1970: x) wie schon zuvor zitiert

wurde. Wenn subjektive Wahrscheinlichkeiten nur mit einer Form von Unsicherheit umgehen können, ist das Modell nicht allgemein genug um den Ansprüchen de Finettis an Wahrscheinlichkeitstheorie zu genügen, da andere Arten von Unsicherheit nicht modelliert werden können. Auch wenn in diesem Argument möglicherweise ein zu starker Fokus auf die Begriffswahl de Finettis gelegt wird und er mit „uncertainty“ einfach nur Risiko gemeint haben könnte, ist das Argument für einen noch zentraleren Begriff nicht von der Hand zu weisen. Glauben (*beliefs*) an das Eintreten von Ereignissen von rationalen Akteuren sind subjektive Wahrscheinlichkeiten. Wieso sollte dieser Glauben immer mit dieser, von de Finetti implizit unterstellten Gewissheit, ausgestattet sein?

Beliefs wie: „die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen regnet liegt zwischen 20 und 40 Prozent“ sind mindestens ebenso plausibel wie „die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen regnet, ist 30 Prozent“. Subjektiver Glauben über das Eintreten von Ereignissen können also ohne Zweifel *ungewiss* sein.

Ein Modell für solche Einschätzungen sollte diese Ungewissheit modellieren können und das können subjektive Intervallwahrscheinlichkeiten leisten.

Besonders auffällig wird die Unterkomplexität der subjektiven Punktwahrscheinlichkeiten, wenn man die Wahrscheinlichkeit verhaltenstheoretisch, als Wetteinsatz in einem Spiel, interpretiert, was im letzten Gliederungspunkt schon eingeführt wurde.

Wir betrachten im Folgenden Wetten, die eine Nutzeinheit auszahlen, wenn das Ereignis eintritt und nichts auszahlen, wenn das Ereignis nicht eintritt. Eine subjektivistische Wahrscheinlichkeit $P(E)$ ohne Ungewissheit impliziert dann, dass man sowohl geneigt dazu wäre $P(E) - \epsilon$ ($\forall \epsilon > 0$) für eine Wette, die eine Nutzeinheit auszahlt, wenn das Ereignis eintritt und nichts auszahlt, wenn das Ereignis nicht eintritt, zu zahlen als auch für $P(E) + \epsilon$ eine solche Wette zu verkaufen.

Ein, sich seiner Wahrscheinlichkeitseinschätzung ungewisser Akteur wird einen

fairen Preis für diese Wette (genau wie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis selbst) nicht genau festlegen können - einen maximalen Einkaufspreis und einen minimalen Verkaufspreis dagegen schon. Erlaubt man intervallförmige Wahrscheinlichkeiten kann die untere Grenze der Intervallwahrscheinlichkeit $\underline{P}(E)$ als Disposition, jede Summe kleiner als $\underline{P}(E)$ für eine solche Wette zu zahlen, interpretiert werden. Analog besteht eine Disposition eine solche Wette für jeden Preis größer als $\overline{P}(E)$ (der oberen Grenze des Intervalls) zu verkaufen.

Die Aussage: „Die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen regnet liegt zwischen 20 und 40 Prozent“ entspricht $\underline{P}(„Morgen regnet es“) = 0.20$ und $\overline{P}(„Morgen regnet es“) = 0.40$. Ein Akteur mit dieser subjektiven Intervallwahrscheinlichkeit, ist sich seiner Einschätzung in so weit sicher, dass seine subjektive Wahrscheinlichkeit mindestens 0.2 beträgt. Deshalb wäre er geneigt jeden Preis der kleiner als 0.2 Nutzeinheiten ist für eine Wette um eine Nutzeinheit auf das Ereignis „Morgen regnet es“ zu bezahlen. Analog wäre er bereit dazu für jeden Preis größer als 0.4 Nutzeinheiten die selbe Wette zu verkaufen.

4 Kohärente Upper und Lower Previsions und Probabilities

Im letzten Gliederungspunkt wurde versucht auf sehr zugängliche Weise das Modell der Imprecise Probabilities beziehungsweise der Intervallwahrscheinlichkeiten zu beschreiben und aufzuzeigen, warum subjektive Punktwahrscheinlichkeiten nicht ausreichen um die *beliefs* von rationalen Akteuren adäquat zu repräsentieren. Es folgt eine formale Herleitung von Lower und Upper Probabilities über Lower und Upper Previsions und ein Versuch *Vermeiden sicheren Verlusts* und *Kohärenz* als Rationalitätskriterien, ähnlich der Kohärenz bei de Finetti (die aber eher mit Avoiding Sure Loss zu vergleichen ist), für die Wahl von Lower und Upper Previsions zu rechtfertigen.

4.1 Upper and Lower Previsions

Man betrachte das Tripel $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$.

Dabei bezeichnet Ω die Menge der möglichen Zustände ω . Ω muss vollständig und disjunkt definiert sein, das heißt es muss immer genau ein Zustand ω zutreffen.

Eine Wette X ist eine beschränkte Funktion von Ω nach \mathbb{R} . Dabei ist $X(\omega)$ die Auszahlung gemessen in linearen Nutzeinheiten, wie sie in (2.) über Walleys Wahrscheinlichkeitswährung definiert wurden. Das heißt die Wette zahlt $X(\omega_1)$ Nutzeinheiten aus wenn Zustand ω_1 der Fall ist, $X(\omega_2)$ Nutzeinheiten, wenn Zustand ω_2 der Fall ist und so weiter. \mathcal{K} ist die Menge von Spielen auf der \underline{P} definiert ist.

Eine Wette X ist subjektiv *desirable* wenn und genau wenn man eine Disposition dazu hat X zu akzeptieren, wenn sie angeboten wird. Allerdings besteht nicht unbedingt eine Disposition dazu eine nicht desirable Wette abzulehnen, es kann auch nur eine gewisse Unsicherheit geben ob man die Wette annimmt oder nicht. (vgl. Walley 1991: 60)

$\underline{P}(X)$, die lower Prevision der Wette X , ist behavioral definiert als, Disposition jeden Preis niedriger als $\underline{P}(X)$ für die Wette X zu bezahlen. Das heißt, dass jede Wette $X - \underline{P}(X) + \epsilon$ ($\forall \epsilon > 0$) desirable ist. Die Wette $X - \underline{P}(X)$ wird bezeichnet als marginal gamble $G(X)$ (vgl. Walley 1991: 68). Eine äquivalente Definition von $\underline{P}(X)$ ist also über ein zugrunde liegendes set of desirable Gambles $X - \underline{P}(X) + \epsilon$ ($\forall \epsilon > 0$) möglich.

Wir definieren außerdem: $\overline{P}(X) = -\underline{P}(-X)$.

$\overline{P}(X)$, die upper Prevision der Wette X , ist also das (-1)fache des Supremums des Kaufpreises für die negative Wette von X (mit $[-X(\omega)] = -[X(\omega)] \forall \omega \in \Omega$). $\overline{P}(X)$ ist somit interpretierbar als Disposition für jeden Preis höher als $\overline{P}(X)$

die Wette X zu verkaufen.

Jedes Kriterium, das für $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$ festgelegt wird schließt also auch alle $\overline{P}(X)$ mit ein, solange $-X$ in \mathcal{K} ist.

4.2 Rationalitätskriterien für lower und upper Previsions

Die Rationalitätskriterien *Vermeiden sicheren Verlusts* sowie der *Kohärenz* können über wenige axiomatische Prämissen hergeleitet werden. Diese Axiome sind Annahmen wann für jeden rationalen Akteur Wetten (nicht) desirable sein sollten:

- (D0) Wenn $\sup X < 0$ dann ist X nicht desirable.
- (D1) Wenn $\inf X > 0$ dann ist X desirable.
- (D2) Wenn X desirable ist und $\lambda \in \mathbb{R}^+$, dann ist λX desirable.
- (D3) Wenn X und Y beide desirable sind, dann ist $X + Y$ desirable.

Axiom D0 besagt, dass Wetten, die zu sicheren Verlust führen nicht desirable sind. D1, dass Wetten die zu sicheren Gewinn führen dagegen immer desirable sind. Axiome D2 und D3 sind plausibel wenn Aus- und Einzahlungen linear sind. Um dies zu gewährleisten wird mit der in (2.3) eingeführten linearen Nutzenskala gearbeitet. (vgl. Walley 1991: 60)

4.2.1 Avoiding Sure Loss

Das erste und schwächere Rationalitätskriterium für \underline{P} ist, dass die einzelnen $\underline{P}'s$ so gewählt werden sollen, dass keine Disposition entsteht eine Kombination von Wetten anzunehmen, die egal unter welchem Umweltzustand ω einen sicheren Verlust bedeutet.

Wie schon in (2.3) erwähnt ist dieses Rationalitätskriterium unter dem Namen Kohärenz auch bei de Finettis subjektiven Punktwahrscheinlichkeiten von zentraler Bedeutung. Rationale subjektive (Punkt-)Wahrscheinlichkeiten $P(X)$ sind so gewählt, dass keine Disposition besteht Opfer eines sogenannten Dutch Books zu werden. Ein Dutch Book ist eine Kombination von Wetten, die an den Akteur verkauft, oder ihm abgekauft werden, die unabhängig vom eintretenden Ereignis in Kombination zu einem sicheren Verlust für den Akteur führen.

Für subjektive Intervallwahrscheinlichkeiten kann gezeigt werden (vgl. Walley 1991: 68), dass eine lower Prevision $\underline{P}(X)$ sicheren Verlust vermeidet, wenn (und genau wenn) gilt:

$$\sup\left(\sum_{j=1}^n G(X_j)\right) \geq 0 \quad \forall n \geq 1 \text{ und } 1 \leq j \leq n$$

Ein Akteur mit lower Previsions $\underline{P}(X_j)$ hat also genau dann eine Disposition Opfer eines Dutch Books zu werden, wenn es eine endliche Kombination aus Wetten X_1, \dots, X_n gibt, die aufgrund der Preise $\underline{P}(X_1) - \epsilon, \dots, \underline{P}(X_n) - \epsilon$, die man für diese Wetten bereit wäre zu zahlen, dazu führen können, dass egal unter welchem Umweltzustand $\omega \in \Omega$ negativer Nutzen entsteht. Das bedeutet ebenfalls, dass es (zumindest für die endliche Summe $X(\omega)$: $\omega \in \Omega$ mindestens ein ω geben muss mit $\sum_{j=1}^n G(X_j(\omega)) \leq 0$, also mindestens ein Omega bei dem die Auszahlung der kombinierten marginal Gambles mindestens 0 ist. (vgl. Walley 1991: 69)

Dies ist der Fall, obwohl die marginalen Spiele selbst nicht desirable sind. Denn wenn eine Kombination von Wetten mit $\sup(\sum_{j=1}^n G(X_j)) < 0$ existiert, dann existieren auch ϵ_j ($\epsilon_j > 0$ $1 \leq j \leq n$ mit denen immer noch gilt: $\sup(\sum_{j=1}^n (G(X_j) + \epsilon_j)) < 0$). Das heißt es darf auch keine Menge desirabler

Spiele $G(X_j) + \epsilon_j$ geben, die egal unter welchem Umweltzustand ω zu Verlust führen.

Dass Vermeiden sicheren Verlusts ein Rationalitätskriterium für lower Previsions ist, lässt sich als direkte Konsequenz der Desirability Axiome D0 und D3 rechtfertigen. Mit der Definition des marginal Gambles $G(X_j)$ folgt, dass $G(X_j) + \epsilon$ desirable ist $\forall \epsilon > 0$. Wenn die subjektiven lower Previsions die Desirability Rationalitätsaxiome erfüllen, folgt über D3 dann, dass jegliche Summe $\sum (G(X_j) + \epsilon)$, also jegliche Kombination aus Spielen X_j mit lower Previsions $\underline{P}(X_j)$, ebenfalls desirable ist. Mit D0 folgt die Definition: $sup[\sum_{j=1}^n G(X_j) + \epsilon] \geq 0$. (vgl. Walley 1991: 68)

4.2.2 Kohärenz

Die sehr viel stärkere Rationalitätsbedingung für lower Previsions ist die Kohärenz. Kohärente lower Previsions vermeiden auch immer sicheren Verlust. Im Allgemeinen bezeichnet Kohärenz eine Art von Selbstkonsistenz. Inkohärente lower Previsions liegen vor, wenn die Suprema der Kaufpreise $\underline{P}(X_i)$ für Wetten X_i das Supremum für den Kaufpreis einer weiteren Wette X_0 implizieren, der größer ist als das subjektiv ebenfalls im Modell spezifizierte $\underline{P}(X_0)$. Die festgelegten \underline{P} 's widersprechen sich also, wenn das System inkohärent ist. (vgl. Walley 1991: 72f)

Formal definiert ist eine lower Prevision $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$ kohärent, wenn gilt:

$$sup[\sum_{i=1}^n G(X_j) - mG(X_0)] \geq 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } X_0, X_1, \dots, X_n \in \mathcal{K}.$$

Diese Definition lässt sich ebenfalls über die Desirability Axiome als rational rechtfertigen. Man betrachte dazu die drei Fälle $m=0$, $m > 0$ aber $n=0$ und

der entscheidende allgemeine Fall: $m, n > 0$: (vgl. Walley 1991: 72f)

Fall 1: $m = 0$

Die Definition von Kohärenz entspricht in diesem Fall der Definition von Avoiding Sure Loss. Dies zeigt, dass kohärente lower Previsions auch immer sicheren Verlust vermeiden. Gerechtfertigt wurde dies in 4.2.1 mit Axiom D0 und D3.

Fall 2: $m > 0, n = 0$

In diesem Fall reduziert sich die Kohärenz-Definition auf:

$$\begin{aligned} \sup[-G(X_0)] &\geq 0 \Leftrightarrow \\ -\inf[G(X_0)] &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \underline{P}(X)_0 &\geq \inf(X_0) \quad \forall X_0 \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Bedingung für Kohärenz in diesem Fall erfüllt ist, wenn der maximale Preis für eine Wette X_0 mindestens so hoch ist wie die kleinste mögliche Auszahlung der Wette X . Wenn dies nicht der Fall ist würde man Wetten mit sicheren Gewinn ablehnen, die nach Axiom D1 aber desirable sind.

Fall 3: $m, n > 0$ Ist eine lower Prevision $(\Omega, \mathcal{X}, \underline{P})$ nicht kohärent, dann existieren $m, n \in \mathbb{N}_0$, Wetten $X_0, X_1, \dots, X_n \in \mathcal{X}$ und ein $\epsilon > 0$ so dass:

$$\begin{aligned} \sup\left[\sum_{i=1}^n G(X_j) - mG(X_0)\right] < 0 \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^n [G(X_j) + \epsilon] \leq m[G(X_0) - \epsilon] \end{aligned}$$

Mit der Definition der marginal Gambles - jedes marginal Gamble $G(X)$ ist fast desirable und jedes Spiel $G(X) + \epsilon$ ($\forall \epsilon > 0$) echt desirable - und

Axiom D3 folgt, dass die linke Seite der Gleichung desirable ist. Da die rechte Seite der Ungleichung, wegen der kleiner-gleich Relation, mindestens ebenso gut ist, sollte auch das Spiel $m[G(X_0) - \epsilon]$ desirable sein. Mit D2 ($\lambda = 1/m$) sollte auch $G(X_0) - \epsilon$ desirable sein. Da nach Definition von $G(X)$ gilt: $G(X_0) - \epsilon = X_0 - (\underline{P}(X_0) + \epsilon)$ muss auch die linke Seite dieser Gleichung desirable sein. Man sollte demnach bereit sein $\underline{P}(X_0) + \epsilon$ für die Wette X_0 zu zahlen. Dies widerspricht aber dem im Modell festgelegtem $\underline{P}(X_0)$, also dass man nach Modell nur bereit ist jeden Preis niedriger als $\underline{P}(X_0)$ für die Wette X_0 zu bezahlen. Das Modell widerspricht sich also selbst, wenn die Kohärenzbedingung nicht eingehalten wird.

Wenn eine lower Prevision $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$ nicht kohärent ist für $\underline{P}(X_0)$ kann die sogenannte natural extension gebildet werden. Dazu wird das zuvor festgelegte $\underline{P}(X_0)$ unter Berücksichtigung von allem Spielen $\sum_{j=1}^n G(X_j) - mX_0$ nach oben korrigiert. Hat die vorherige lower Prevision sicheren Verlust vermieden wird die natural extension kohärent sein. (vgl. Walley 1991: 74)

Lower und Upper Previsions stellen ein Unsicherheitskonzept dar, dass sich nicht auf, die im Folgenden (4.3) eingeführten, Intervallwahrscheinlichkeiten reduzieren lässt (vgl. Walley 1991: 82f) und die auch Anwendungsmöglichkeiten bereitstellen, für die der Spezialfall der lower/upper Probabilities nicht ausreichen würde. Beispielsweise werden auf Basis von Upper Previsions kohärente Risikomaße gebildet, die zur Quantifizierung von existenzgefährdenden Risiken, etwa in Banken, und damit zur Festlegung der Höhe des notwendigen Eigenkapital genutzt werden (siehe dazu: Artzner/Delbaen/Eber/Heath 1999).

4.3 Lower and Upper Probabilities

Lower und upper Probabilities sind ein Spezialfall von lower und upper Previsions. Im Allgemeinen betrachtet man bei lower Previsions das Tripel $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$. Nun sei A eine Teilmenge von Ω , das heißt ein Event. Die lower Pro-

bability für das Event A ($\underline{P}(A)$) ist der Preis, den man für eine Wette, die eine Nutzeinheit auszahlt, wenn das Event A eintritt und nichts auszahlt, wenn es nicht eintritt. Die Menge an Wetten \mathcal{K} darf also bei lower Probabilities nur aus Wetten dieser Art bestehen, Mengen dieser Art bezeichnen wir mit \mathcal{A} .

Wir können aufgrund der Wettstruktur von Wetten in \mathcal{A} , die upper Probability eines Events A definieren als: $\overline{P}(A) = -\underline{P}(\bar{A})$, dabei soll \bar{A} das Komplement von A in Ω bezeichnen. Das heißt die upper Probability für das Event A ist der Verkaufspreis der Wette die eins auszahlt, wenn das Event A nicht eintritt und null, wenn es eintritt. (vgl. Walley 1991: 81f)

Mit Kohärenz folgt für Lower Probabilities (und damit natürlich auch Upper Probabilities) unter anderem (vgl. Walley 1991: 84):

1. $0 \leq \underline{P}(A) \leq \overline{P}(A) \leq 1$ (also insbesondere non-negativity)
2. $\underline{P}(\Omega) = \overline{P}(\Omega) = 1$ (also unit-measure)
3. $\underline{P}(A \cup B) \geq \underline{P}(A) + \underline{P}(B)$ (also explizit keine Additivität!)

Das heißt, dass für lower und upper probabilities die Axiome von Kolmogorov nicht gelten.

5 Imprecise Dirichlet Model

„I have, on the desk in front of me, a closed bag containing coloured marbles. I intend to shake the bag, to reach into it and to draw out one marble. What is the probability that i will draw a red marle?“ (Walley 1996: 3)

Wir befinden uns in einem Problem vollkommener (Knight'scher) Unsicherheit - die Menge der möglichen Ereignisse ist unbekannt. Man könnte einwenden, dass Ω sehr einfach zu bilden sei mit $\Omega = \{\text{rot, nicht-rot}\}$, oder $\Omega = \{\text{rot, weiß, andere Farbe}\}$ - eine solche Menge von Ereignissen ist nicht schwer

zu bilden. Es gibt sogar unendlich viele Möglichkeiten eine solche Menge zu bilden - diese Willkürlichkeit von Ω ist allerdings sehr problematisch, wenn man Wettquotienten, also subjektive Wahrscheinlichkeiten festlegen möchte. Walley zeigt mit diesem Szenario, dass das Konzept der einfachen subjektiven Wahrscheinlichkeit hochgradig unterkomplex ist. Bayesianer gehen davon aus, dass für jedes Event eine als fair empfundene Einzahlung für eine Wette mit Auszahlung eins, wenn das Ereignis eintritt und null wenn das Ereignis nicht eintritt gefunden werden kann (vgl. Walley 1996). Damit liegt dann auch eine subjektive Punktwahrscheinlichkeit vor. Doch kann ein fairer Preis immer gefunden werden?

Aufgrund der Willkürlichkeit von Ω ist es nicht sinnvoll das Indifferenzprinzip anzuwenden. Das Indifferenzprinzip besagt, wie in (2.1) schon eingeführt, dass bei $n > 1$ unterscheidbaren und sich gegenseitig ausschließenden Ereignismöglichkeiten die Eintrittswahrscheinlichkeit jedes Ereignisses ohne Vorliegen von weiteren Informationen mit $p = \frac{1}{n}$ festzulegen ist. Man spricht hier auch von Laplace'scher Ungleichheit. Wendet man das Indifferenzprinzip an werden je nach zuvor festgelegtem Ω unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten festgelegt. Für $\Omega = \{\text{rot, nicht-rot}\}$ wird dem Event, dass eine rote Kugel gezogen wird die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zugewiesen. Für $\Omega = \{\text{rot, weiß, andere Farbe}\}$ die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$ und so weiter. Die Wahrscheinlichkeit (und damit der Punkt an dem die Wette auf das Ereignis als fair angesehen wird) würde also von der Wahl von Ω abhängen. Dies widerspricht dem embedding principle, das besagt, dass Inferenz nicht von Ω abhängen soll. (vgl. Walley 1996: 4f und Walley 1991: 227)

Betrachtet man imprecise Probabilities gibt es eine Alternative: vacuous Probabilities. Für nicht triviale Events A ist das das Modell $\underline{P}(A) = 0$ und $\overline{P}(A) = 1$. Das bedeutet, dass man nichts zahlen würde für eine 0-1-Wette auf A und diese Wette auf A auch zu keinem Preis unter 1 verkaufen würde. Für die trivialen Events \emptyset und Ω gilt natürlich: $\underline{P}(\emptyset) = 0$ und $\overline{P}(\emptyset) = 0$ sowie $\underline{P}(\Omega) = 1$ und $\overline{P}(\Omega) = 1$. (vgl. Walley 1996: 5)

Dieses Modell erfüllt die drei von Walley festgelegten Rationalitätskriterien: Kohärenz, das Embedding Principle und das Symmetry Principle. Letzteres verlangt, dass falls keine Information darüber besteht, dass ein Event wahrscheinlicher ist als ein anderes, sollten die Wahrscheinlichkeiten über die Events symmetrisch sein. Das ist auch das Argument, dass zur Rechtfertigung des Indifferenzprinzips verwendet wird. Bei vacuous Probabilities wird jedem nicht trivialen Event die selbe lower und upper Probability zugewiesen - es erfüllt also das Symmetry Principle. (vgl. Walley 1996: 5)

Ein allgemeines Modell um Inferenz bei multinomialen Daten zu ziehen sollte bei vollkommener Unsicherheit also vacuous Probabilities liefern. Ebenfalls sollte es möglich sein mithilfe von Daten zu lernen, also initiale Wahrscheinlichkeitseinschätzungen mithilfe von Daten zu verbessern. Das heißt, wenn schon eine Kugel aus dem Beutel gezogen wurde und sie nicht rot war hat man Gründe gegen Rot zu wetten - die Upper Probability sollte etwas nach unten korrigiert werden. Wird eine rote Kugel gezogen sollte dagegen die lower Probability höher als zuvor angesetzt werden. Je öfter man zieht desto geringer sollte der Abstand zwischen lower und upper Probability werden, das heißt es sollte eine immer geringere Ungewissheit bestehen bleiben. Zieht man etwa 100 mal aus dem Beutel und 30 der gezogenen Kugeln waren rot sollten lower upper Probability relativ nahe um 0.3 liegen (mit $\underline{P}_{100}(A) \leq 0.3 \leq \overline{P}_{100}(A)$). Zieht man in 1000 Versuchen 300 mal rot sollte gelten: $\underline{P}_{100}(A) \leq \underline{P}_{1000}(A) \leq 0.3 \leq \overline{P}_{1000}(A) \leq \overline{P}_{100}(A)$. (vgl. Walley 1996)

Das Imprecise Dirichlet Modell ist ein statistisches Modell zum Lernen bei wiederholten Ziehungen:

Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ mit $k \geq 2$ die vollständige und disjunkte Menge der möglichen Ergebnisse.

Sei n_j die Anzahl der Beobachtungen in Kategorie ω_j und $\sum_{j=1}^k n_j = N$ und $\theta_j = P(\omega_j)$.

Die Dirichlet(s,t) priori Verteilung für den Vektor $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ ist:

$$f(\theta) \propto \prod_{j=1}^k \theta_j^{st_j-1}$$

Dabei bezeichnet t_j das Mittel von θ_j unter der Priori Verteilung. s ist ein fester Parameter, der in Verbindung mit der Vorsicht gegenüber den Daten gebracht werden kann. Je größer s desto kleiner ist der Einfluss der Daten auf die Wahrscheinlichkeitseinschätzung und desto breiter ist das Intervall $[\underline{P}(X), \overline{P}(X)]$. Multipliziert mit der durch die multinomialen Daten $n=(n_1, n_2, \dots, n_k)$ generierten Likelihood:

$$L(\theta|n) \propto \prod_{j=1}^k \theta_j^{n_j}$$

entsteht die posteriori Dichte

$$f(\theta|n) \propto \prod_{j=1}^k \theta_j^{n_j+st_j-1}$$

Dies ist wieder eine Dirichlet Dichte mit Parametern $(N+s, t^*)$. Dabei ist $t^*=(n_j + st_j)/(N+s)$.

Dirichlet Verteilungen haben den Vorteil, dass Kategorien ω kombiniert werden können und auch nach dieser Transformation immer noch eine Dirichlet Verteilung vorliegt. Das heißt, dass eine Änderung von Ω unproblematisch ist und deshalb die Inferenz nicht abhängig ist von der Wahl von Ω .

Das Imprecise Dirichlet Modell wird definiert als Menge aller Dirichlet (s,t) Verteilungen mit $0 < t_j < 1, j=1,2,\dots,k \sum_{j=1}^k t_j = 1$. Dabei ist s , wie schon gesagt, eine zuvor festgelegte Konstante, die nicht abhängig ist von Ω . Die Menge der Dirichlet Priori Verteilungen \mathcal{M}_0 wird genutzt um vollständige Ungewissheit zu modellieren.

Die Menge der Posteriori Verteilungen \mathcal{M}_N sind alle Dirichlet $(N+s, t^*)$ Ver-

teilungen mit $t^*=(n_j + st_j)/(N+s)$ und $0 < t_j < 1, j=1,2,\dots,k \sum_{j=1}^k t_j = 1$. Wenn man nun $t_j \rightarrow 1$ beziehungsweise $t_j \rightarrow 0$ erhält man die Posteriori Upper und Lower Probabilities:

$$\overline{P}(A|n) = \frac{n_j+s}{N+s}$$

und

$$\underline{P}(A|n) = \frac{n_j}{N+s}$$

(vgl. Walley 1996: 8ff)

An diesen Formeln wird auch die Bedeutung von s klarer. Der Parameter s kann interpretiert werden als s verborgene Ziehungen. Je größer s desto geringer ist das Gewicht der einzelnen Ziehungen.

Walley liefert mit diesem Modell eine Möglichkeit bayesianische Statistik für Intervallwahrscheinlichkeiten für multinomial verteilte Zufallsvariablen zu betreiben. Wie bei Bayes üblich werden a-priori Informationen und Datenwissen gemeinsam genutzt um eine posteriori Verteilung festzulegen.

6 Fazit

Ziel dieser Arbeit war es Peter Walleys Beitrag zum philosophischen Diskurs über den Wahrscheinlichkeitsbegriff zu veranschaulichen. Er schließt an Bruno de Finettis Verständnis an, der sich davon distanziert Wahrscheinlichkeit als objektiv gegeben anzusehen. Weder folgt aus Evidenz notwendigerweise (logisch) objektiver Konsens, noch soll Wahrscheinlichkeit als eine objektiv existente, Experimenten inherente Eigenschaft verstanden werden, da diese nicht beobachtet werden kann. Nach de Finetti ist Wahrscheinlichkeit subjektiv. Der Begriff der Wahrscheinlichkeit soll genutzt werden um den subjektiven Glauben rationaler Akteure an das Eintreten von Ereignissen zu beschreiben. Diese *beliefs* manifestieren sich in als subjektiv fair angesehene

Wettquotienten, die - bei rationalen Akteuren - sicheren Verlust vermeiden. De Finetti bezeichnet solche Wettquotienten als kohärent. Wahrscheinlichkeiten, so de Finettis philosophische Interpretation, sind kohärente Wettquotienten.

Walleys Verallgemeinerung von de Finettis Wahrscheinlichkeitsbegriff lässt auch mit weniger Gewissheit ausgestattete *beliefs* zu. Unterschiedliche Quotienten für Einkaufs- und Verkaufspreise von Wetten auf Ereignisse werden zugelassen - eine Modellierung die echten *beliefs* wahrscheinlich sehr viel näher kommt. Genauso wie de Finetti, stellt Walley Rationalitätsbedingungen für diese Quotienten auf, diese sollen im Fall von Intervallwahrscheinlichkeiten widerspruchsfrei sein.

Die Problematik, dass nicht immer ein fairer Wettquotient gefunden wird, zeigt Walley sehr anschaulich an seinem *Bag of Marbles* Beispiel. Ebenfalls über dieses Beispiel führt er die Idee der *vacuous Probabilities* ein - einer Intervallwahrscheinlichkeit $[0,1]$, mit der a-priori Ignoranz modelliert werden kann, was in der, mit dem subjektiven Punkt-Wahrscheinlichkeitsbegriff in Verbindung stehenden, Bayes-Statistik sehr problematisch ist. Mit dem Imprecise Dirichlet Modell liefert Walley eine Möglichkeit Ungewissheit im Multinomialen Modell zu modellieren und Bayesianische Statistik für Intervallwahrscheinlichkeiten zu betreiben und dabei eine nicht-informative, symmetrische, gegenüber Transformationen invariante und sinnvoll - als *vacuous Probabilities* - interpretierbare a-priori Verteilung zu nutzen.

Obwohl sich diese Arbeit insbesondere mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff beschäftigt hat, kann dieser Diskurs natürlich auch auf Unsicherheitskonzepte im Allgemeinen ausgeweitet werden. Es existieren zahlreiche Möglichkeiten zur Modellierung von Unsicherheit. Beispiele dafür sind das in der Statistik zentrale Konzept der Likelihood oder Fuzzy Sets, die sich mit dem Zugehörigkeitsgrad von Elementen zu einer Menge beschäftigen. Offensichtlicherweise sind sowohl lower/upper previsions, als auch lower/upper Probabi-

lities ebenfalls keine Wahrscheinlichkeiten im mathematischen Sinne, da die Wahrscheinlichkeitsaxiome nicht eingehalten werden.

Da in der Statistik sowohl der Wahrscheinlichkeitsbegriff im Speziellen als der der Unsicherheit im Allgemeinen absolut zentral sind und deren Modellierung eine der Hauptaufgaben der Statistik ist, sollte auch der diesen Begriffen zugrunde liegende philosophische Diskurs an Präsenz zunehmen.

Literatur

- [Artzner u. a. 1999] ARTZNER, Philippe ; DELBAEN, Freddy ; EBER, Jean-Marc ; HEATH, David: Coherent Measures of Risk. In: *Mathematical* 9 (1999), Nr. 3, S. 203–228
- [Finetti 1975] FINETTI, Bruno d.: *Theory of probability: A critical introductory treatment: Volume 2*. London : Wiley, 1975 (Wiley series in probability and mathematical statistics)
- [Finetti 1981] FINETTI, Bruno d.: *Wahrscheinlichkeitstheorie: Einführende Synthese mit kritischem Anhang*. Wien : R. Oldenbourg, 1981 (Scientia nova)
- [Gillies 2000] GILLIES, Donald: *Philosophical theories of probability*. London and New York : Routledge, 2000 (Philosophical issues in science)
- [Keynes 1921] KEYNES, John M.: *A Treatise on Probability*. London : Macmillan And Co., 1921
- [Knight 1971] KNIGHT, Frank H.: *Risk, uncertainty and profit*. Chicago : University of Chicago Press, 1971 (A Phoenix book, P396)
- [Laplace, Pierre Simon marquis de 1902] LAPLACE, PIERRE SIMON MARQUIS DE: *A philosophical essay on probabilities*. New York and London : J. Wiley and Chapman and Hall, 1902
- [Müller 1993] MÜLLER, Wolfgang: Risiko und Ungewißheit. In: *Handwörterbuch der Betriebswirtschaft* 3 (1993), Nr. 5, S. 3813–3824
- [Walley 1991] WALLEY, Peter: *Monographs on statistics and applied probability*. Bd. 42: *Statistical reasoning with imprecise probabilities*. 1st ed. London and New York : Chapman and Hall, 1991

[Walley 1996] WALLEY, Peter: Inferences from Multinomial Data: Learning about a Bag of Marbles. In: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B* 58 (1996), Nr. 1, S. 3–57