Der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff

Seminararbeit

Verfasser: Christian Schmid

Betreuer der Arbeit: Georg Schollmeyer

LMU München

22. April 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

> Ganz kurz möchte ich lediglich die Auffassungen unterstreichen, in denen meine Theorie sich von anderen Theorien unterscheidet. Eigentlich ist meine Theorie, paradox und ein wenig herausfordernd ausgedrückt, einfach die folgende:
>
> Es existiert keine objektive Wahrscheinlichkeit
>
> Das Aufgeben abergläubischer Ideen über die Existenz von Phlogiston, Kosmischem Aether, absolutem Raum sowie absoluter Zeit... von Feen und Hexen bildet einen wesentlichen Schritt auf dem Weg zum wissenschaftlichen Denken. Auch die Wahrscheinlichkeit ist, wenn man ihr etwas wie eine objektive Existenz zuschreiben will, eine nicht minder irreführende Fehlauffassung, ein illusorischer Versuch, unsere wahren probabilistischen Überzeugungen zu extrovertieren oder zu konkretisieren.
>
> *Bruno de Finetti*

Diese Arbeit, die im Zuge des Seminars *Wahrscheinlichkeit und andere Unsicherheitskonzepte* des Instituts für Statistik der LMU München geschrieben wurde, bezieht sich auf Bruno de Finettis Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriff, welche auf den Bayesianismus und einer strengen subjektiven Auslegung der Wahrscheinlichkeit beruht. Für de Finetti sind Wahrscheinlichkeiten immer als subjektiv zu interpretieren und sie drücken sich als Glaubensgrad eines betrachtenden Individuums aus.

Für de Finetti ist ein sinnvoller Wahrscheinlichkeitsbegriff eine Quantifizierung des Gefühls einer Person darüber, ob ein bestimmtes Ereignis eintreffen wird oder nicht. Wahrscheinlichkeiten werden definiert über ein Konstruktionsverfahren, das jedem Menschen die Freiheit zu unterschiedlichen Bewertungen lässt. Subjektive Wahrscheinlichkeiten sind dabei über Einsätze in Wettspielen zu beobachten, die diese Person für das zu bewertende Ereignis zu bringen bereit ist. Die Beobachtbarkeit ist hierbei für de Finetti von zentraler Bedeutung für die wissenschaftliche Begriffsbildung. Da Wahrscheinlichkeiten zunächst nicht beobachtbar sind, definiert er

Wahrscheinlichkeiten mittels Wettspielen.

de Finetti führt den Begriff der Wahrscheinlichkeit mit Hilfe einer Serie von Wetten ein, indem er den Glaubensgrad einer rationalen Person für ein bestimmtes Ereignis anhand von Wettquotienten identifiziert. Das fundamentale Kriterium dem ein Spieler gehorchen muss, um beim wetten einen sicheren Verlust zu vermeiden, ist das der *Kohärenz*. Laut de Finetti ist Kohärenz eine hinreichende Bedingung für ein faires Wettsystem und die Glaubensgrade eines Spielers sind kohärent, wenn sie die kolmogorovschen Wahrscheinlichkeitsaxiome nicht verletzen. Den Begriff der Wahrscheinlichkeit interpretiert de Finetti dann anhand fairer Wettquotient: Wettquotienten für die ein Spieler eine Wette sowohl kaufen als auch verkaufen würde. Geht es nach Bruno de Finettis Perspektive gibt es viele verschiedene Wege Wahrscheinlchkeiten zu definieren. Die Idee Wahrscheinlichkeiten anhand von Wettverhalten zu untersuchen ist lediglich ein für jederman verständliches Hilfsmittel, das einfach ist und nützliche Erkenntnisse liefert. de Finettis Werk war eine grundlegende Errungenschaft für die Bayesiansche Erkentnisstheorie.
Das zentrale Werkzeug zur Rechtfertigung der subjektiven Wahrscheinlichkeitsinterpretation ist die Dutch Book Argumentation. Hierbei handelt es sich um eine Serie von Wetten, mit deren Hilfe versucht wird Glaubensgrade als Wahrscheinlichkeitsinterpretation zu rechtfertigen.

1.1 Zur Person de Finetti

Bruno Johannes Leonhard Maria de Finetti wurde am 13. Juni 1906 in Innsburck, Österreich geboren. Sein Vater Gualtiero de Finetti, ein Italiener, der zum studieren zuerst nach Innsbruck und dann nach Graz zog, war genauso wie dessen Vater Zeit seines Lebens ein erfolgreicher Eisenbahningeneur. Im Alter von sieben Jahren besuchte Bruno de Finetti das erste Mal die Schule und wurde, dank den vielen Dingen, die er von seinem Vater gelernt hatte, sogleich in die 2. Klasse gesetzt. Während des ersten Weltkrieges zog er sich eine ernsthafte Infektion zu und musste sich in Folge dessen eines seiner Beine um 7cm verkürzen lassen.

All diese einschneidenden Ereignisse in seinem noch jungen Leben hielten ihn allerdings nicht davon ab, sich weiterhin fleißig fortzubilden und so wurde er im Jahr 1923 in die *Politecnico di Milano* aufgenommen, um sich zum Mathematiker ausbilden zu lassen. Vier Jahre später reichte er seine Dissertation über Affine Vektorräume ein und folgte einem Angebot des *Central Italian Statistical Institute*, geleitet von Corrado Gini, in Rom. Zu jener Zeit entstanden seine ersten bahnbrechenden Arbeiten zur Theorie der subjektiven Wahrscheinlichkeiten.
Kurze Zeit später ging de Finetti in die Wirtschaft und arbeitete für die *Assicurazioni Generali di Trieste*, unterrichte jedoch ebenso Mathematik an den Universitäten in Triest und Padova. Ende der Vierziger erhielt de Finetti einen Ruf der Universität Triest, konnte ihm allerdings im damals noch faschistischen Italien nicht folgen, da er zu diesem Zeitpunkt noch unverheiratet war. So dauerte es bis zum Jahr 1947 bis er endlich den Lehrstuhl für Finanzmathematik an der Universität Triest übernehmen konnte. Jedoch wechselte er schon im Jahre 1954 zum Lehrstuhl

für Wahrscheinlichkeitstheorie nach Rom, wo er eine Vielzahl von Arbeiten veröffentlichte, die jedoch aufgrund der schweren Lage Italiens nach dem Zweiten Weltkrieg vor allem im Angloamerikanischen Gebiet wenig Beachtung fanden. So ist es hauptsächlich den amerikanischen Statistikern Leonard Jimmie Savage und Jerzy Neyman zu verdanken, dass sich de Finettis Arbeiten auch ausserhalb Europas verbreiteten. Sie ermöglichten es de Finetti 1950 erstmals in die Vereinigten Staaten zu reisen, um seine Ideen auch dort publik zu machen und boten ihm zu späteren Zeitpunkent eine Gastprofessur an der University of Chicago an. Vor allem zwischen Savage und de Finetti enstand eine tiefe Freundschaft.

de Finetti arbeitete bis 1981 an der Universität Rom, wo er am 20. Juli 1985 verstarb. [5]

Kapitel 2

Wahrscheinlichkeitsinterpretationen

2.1 Der objektive und der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff

Der objekitve Wahrscheinlichkeitsbegriff, häufig auch als der frequentistische oder statistische Wahrscheinlichkeitsbegriff bezeichnet, drückt eine subjektunabhängige Eigenschaft der Realität aus. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E ist die relative Häufigkeit, mit der es in einer großen Anzahl gleicher, wiederholter, voneinander unabhängiger Zufallsexperimente auftritt. Man betrachte dazu das klassische Beispiel des Wurfes einer Münze. In einer langen Münzwurfreihe einer fairen Münze kommt etwa gleichhäufig Kopf wie Zahl vor, also mit objektiver Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ K:=Kopf oder Z:=Zahl. Dies schließt selbstverständlich nicht den Fall aus, dass bei den ersten Würfen die Münze ausschließlich auf der Kopfseite landet, noch das nach einer sehr großen Wurfzahl, sagen wir 1000, die relative Häufigkeit sich weiterhin deutlich von $\frac{1}{2}$ entfernt befindet. Wenn es uns jedoch möglich wäre diese Münze unendlich oft zu werfen, dann stabilisiert sich der Wert bei $\frac{1}{2}$. Sei $f_n(K)$ definiert als die Folge der relativen Häufigkeit des Ereignisses K, so lässt sich aus frequentistischer Sicht die Wahrscheinlichkeit $P(K)$ empirisch festhalten als:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(K) \to P(K)$$

Die Wahrscheinlichkeit für K wird hierbei als Grenzwert der relativen Häufigkeiten eines Ereignisses K interpretiert.

Der objektive Wahrscheinlichkeitsbegriff entwickelte sich Anfang des 20. Jahrhunderts aus der Laplace'schen Definition von Wahrscheinlichkeit heraus. Zu den Hauptbegründern zählen Richard von Mises und Hans Reichenbach. Diese Interpretation der Wahrscheinlichkeit erscheint auf den ersten Blick als die genau richtige Betrachtungsweise. Wir betrachten schlicht Häufigkeiten, die gezählt werden können und schließen aus diesen beobachteten Häufigkeiten auf die Realität. Allerdings wird die objektive Auffassungin der Wissenschaft heutzutage als größtenteils problematisch angesehen. Betrachten wir dazu als Beispiel eine an einem Gehirntumor leidende Person. Diese Person bittet vor ihrer bevorstehenden Operation den Arzt, wie groß ihre Überlebenswahrscheinlichkeit ist. Der Arzt mag jetzt eine Aussage tätigen wie: "Ihre Überlebenswahrscheinlichkeit liegt bei 70%". Doch wie soll diese Aussage interpretiert werden? Mittels der frequentistischen Definition könnte das nur bedeuten, dass wenn der Arzt diese Person unter den selben Bedingungen immer und immer wieder von Neuem operieren könnte, sie in 70% der Fälle überleben würde. Die an Gehirntumor erkrankte Person würde den Arzt völlig verständnislos gegenüber stehen, da sie sich für das konkrete Risiko einer Operation interessiert und nicht für eine unendliche Reihe von Operationen. Vielleicht ist zudem der Tod der Patientin schon besiegelt, da aus Gründen die dem Arzt nicht bekannt sind, ein Eingriff auf jeden Fall nicht überlebt werden kann. Wir erkennen, dass die Frage, die der Patient gestellt hat, mit der objektiven Interpretation nicht beantwortbar ist.

Der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff, häufig auch als *epistemische Wahrscheinlichkeit* bezeichnet, beruht auf Erkenntnissen von Thomas Bayes und würde vor allem von Bruno de Finetti weiter entwickelt. Sie drückt die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als den rationalen Glaubensgrad bzw. Überzeugungsgrad, zu dem ein Subjekt an das Eintreten eines bestimmten Ereignisses glaubt, aus. Wir erhalten somit für ein Ereignis viele unterschiedliche Einschätzungen: die persönliche Einschätzung von Person A, die persönliche Einschätzung von Person B usw. Je nachdem, wie überzeugt eine Person vom Eintreten eines Ereignisses ist oder wie stark das Eintreten bezweifelt wird, wird die Wahrscheinlichkeit eingeschätzt. Auf Grundlage von vorhandenen Informationen, Kentnissen oder auch Erfahrungen wird auf Basis einer persönlichen Einschätzung ein Urteil über die Sicherheit des Eintretens gefällt. Es werden hierbei von Anfang an keine objektiven Wahrscheinlichkeiten gesucht oder genauer, es wird nicht beabsichtigt, dass eine objektive Realität erfasst werden soll. Die subjektive Interpretation hat den entscheidenden Vorteil, dass sie sehr gut beschreibt, wie Menschen alltäglich Wahrscheinlichkeiten handhaben. Die Glaubensgrade sind hierbei nicht unabänderlich festgelegt sondern können sich bei Erlangung neuer Erkenntinisse auch ändern. Das betrachtende Individuum lernt aus neuen Erfahrungen, bewertet die Situation neu und passt seinen Glaubensgrad gegeben der neuen Information an.
Wenn wir nun wiederum unser Beispiel aus dem Krankenhaus betrachten, indem ein Arzt die Überlebenschancen eines Patienten einschätzen soll, so drückt er mit der Aussage "Überlebenswahrscheinlichkeit 70%" seinen persönlichen Glaubensgrad aus. Er hat sich dabei ein Bild vom zu entfernenden Tumor, vom Gesundheitszustand des Patienten, von seinen eigenen Fähigkeiten usw. gemacht, schätzt nun anhand dieser Infomationen die Situation ein und bezeichnet den Grad seiner Überzeugung, mit dem er auf das Überleben des Patienten wetten würde, als seine Wahrscheinlichkeit. Würde der Patient einen anderen Arzt nach dessen Einschätzung fragen, bekäme er eventuell ein anderes Ergebnis zu hören.

Der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff erscheint auf den ersten Blick schwieriger mathematisch quantifizierbar zu sein als die frequentistische Interpretation. Häufigkeiten sind mathematisch schlicht einfacher fassbar als Glaubensgrade. Für de Finetti ist ein sinnvoller Wahrscheinlichkeitsbegriff eine Quantifizierung des Gefühls einer Person darüber, ob ein bestimmtes Ereignis eintreffen wird oder nicht. Wahrscheinlichkeiten werden definiert über ein Konstruktionsverfahren, das jedem Menschen die Freiheit zu unterschiedlichen Bewertungen lässt. Subjektive Wahrscheinlichkeiten sind dabei über Einsätze in Wettspielen zu beobachten, die diese Person für das zu bewertende Ereignis zu bringen bereit ist. Die Beobachtbarkeit ist hierbei für de Finetti von zentraler Bedeutung für die wissenschaftliche Begriffsbildung. [4],[7]

2.2 Mathematische Gesetze der Wahrscheinlichkeit

Es hat bis Mitte des 20. Jahrhunderts gedauert, bis die Wahrscheinlichkeitstheorie ihren Platz in der modernen Mathematik gefunden hatte, da es erst 1933 dem russischen Mathematiker Andrei Kolmogorov mit seiner Arbeit *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* gelungen ist, die Wahrscheinlichkeitstheorie auf mathematisch stabile Beine zu stellen. Zu verdanken ist dieser Umstand den drei von Kolmogorov postulierten Axiomen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

Definition (Wahrscheinlichkeitsaxiome)
Die Wahrscheinlichkeit ist eine Funktion $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ für Ereignisse $A, A_1, A_2, \dots$ aus einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω mit folgenden drei Eigenschaften:

1. (Nicht - Negativität) $P(E) \geq 0$ für alle $E \in \mathcal{A}$
2. (Normierung) $P(E \cup \bar{E}) = 1$ für alle $E \in \mathcal{A}$
3. (σ-Additivität) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$ falls $E_i \cap E_j = \varnothing$ für $i \neq j, i, j \in \mathbb{N}$ für alle $E_i, E_j \in \mathcal{A}$

Das erste Axiom weist jedem Ereignis E eine Zahl zwischen 0 und 1 zu. Das zweite Axiom besagt, dass Ereignisse, die sicher eintreten, die 1 zugewiesen bekommen. Das dritte Axiom legt fest, wie die Wahrscheinlichkeiten paarweise disjunkter Ereignisse zu addieren sind. Die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung von abzählbar paarweise disjunkter Ereignisse ist gleich der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten.
Auf Basis dieser drei relativ unscheinbaren Aussagen beruht das komplette Konstrukt der Wahrscheinlichkeitstheorie, jedoch sagen uns die Axiome nur, wie Wahrscheinlichkeiten gehandhabt werden sollen und nicht, was Wahrscheinlichkeiten sind oder wie sie interpretiert werden können.
An dieser Stelle sei noch kurz erwähnt, dass ein erster vielversprechender Versuch die Warhscheinlichkeitstheorie gewissen Axiomen unterzuordnen bereits von David Hilberts Schüler Ugo Broggi im Jahre 1907 unternommen wurde. Dessen Ansatz unterscheidet sich von Kolmogovs Ansatz in der Hinsicht, dass für die Funktion P anstatt der σ-Additivität lediglich endliche Additivität postuliert wurde.

Mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsmaßes P ist es uns nun möglich die Theorie auf viele vertraute Fälle anzuwenden. Betrachten wir zum Beispiel den Wurf eines Würfels, so ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und für $\mathcal{A}$ wählen wir die Potenzmenge von Ω. Nehmen wir uns als Wahrscheinlichkeitsfunktion P diejenige, die allen Einzelereignissen $\omega \in \Omega$ den Wert $P(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$ zuweist. Diese Zuweisung liegt aufgrund der Symmetrie des Würfels nahe und wir erhalten zum Beispiel

$$\begin{aligned}
P(\omega \in \{1, 3, 4\}) &= P(\{1\} \cup \{3\} \cup \{4\}) \\
&= P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) \\
&= \frac{3}{6} \\
P(\omega \in \Omega) &= P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}) \\
&= P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) \\
&= 1
\end{aligned}$$

[4],[6]

Kapitel 3

Erwartung und Wahrscheinlichkeit

3.1 Erwartung und Wahrscheinlichkeit

Das Ziel dieses Kapitels ist es Erwartungen mit Wahrscheinlichkeiten zu induzieren. Einleitend sei gesagt, dass Bruno de Finetti großen Wert auf eine Unterscheidung zwischen den Begriffen Erwartung und Vorhersage legt und in diesem Punkt einen entscheidenden Fehler im *Prinzip von Cournot* und damit in Arbeiten zu Wahrscheinlichkeitsinterpretationen von Borel und anderen großen Mathematikern sieht (de Finetti 1981, S. 225). Eine Vorhersage zu machen bedeutet, sich unter den möglichen einzutreffenden Ausgängen auf einen bestimmten Ausgang festzulegen bzw. wie de Finetti es fomuliert, den Ausgang "erraten" zu wollen. Eine Vorhersage für ein Sportereignis, nehmen wir die kommende Fifa Fußballweltmeisterschaft in Brasilien, wäre sich schon jetzt auf den kommenden Weltmeister festzulegen ohne den tatsächlichen Ausgang des Tuniers zu kennen. Die Erwartung, wie sie de Finetti verwendet, sieht in keinster Weise vor, sich für den Ausgang eines Ereignisses festzulegen. "Sie (die Erwartung) behauptet nicht - wie die Vorhersage - irgendetwas, dass sich als wahr oder falsch erweisen könnte, um so die Ungewissheit in eine angebliche, aber trügerische Gewissheit zu verwandeln." (de Finetti 1981, S.91)

Wenn von der Erwartung gesprochen wird, dann wird akzeptiert, dass der Ausgang eines Ereignisses ungewiss bzw. "zufällig" ist. Das Wort zufällig wird im folgenden als Synonym für *nicht bekannt* (stets für das betrachtende Individuum) verwendet. Das der Ausgang eines Ereignisses nicht bekannt ist, muss übrigens nicht zwangsläufig bedeuten, dass das Ergebnis nicht schon feststeht. Das Ergebnis des Ereignisses *Friedrich Schiller ist im Jahr 1780 geboren* kann als zufällig betrachtet werden, wenn das tatsächliche Datum für das betrachtende Subjekt als nicht bekannt gilt. Das Geburtsjahr Schillers steht jedoch seit langem eindeutig fest.

Für ein Ereignis, im folgenden mit E bezeichnet, sind genau zwei Werte möglich, die wir mit 1, das Ereignis ist Wahr und 0, das Ereignis ist falsch, bezeichnen. Streng genommen ist ein

Ereignis eine Abbildung $E : \Omega \to \{0, 1\}$ und wir schreiben kurz $E = 1$ für $E(\omega) = 1$ und $E = 0$ für $E(\omega) = 0$. Betrachten wir zum Beispiel das Ereignis, Friedrich Schillers Geburtsjahr sei sei das Jahr 1780. Dieses Ereignis würde von uns den Wert 0 zugeordnet bekommen, da Schiller im Jahr 1759 geboren ist. Die Aussage, Friedrich Schiller wurde im Jahr 1759 geboren, bekäme damit die 1 zugewiesen. Ereignisse können nach de Finetti immer in wahr und falsch eingeteilt werden und wir schreiben $E = 1$ für E wahr und $E = 0$ für E falsch. Die Negation von E drücken wir im folgenden mit $\bar{E}$ oder $1 - E$ aus.

Erwartung, in de Finettis Sinne, heißt nicht eine Vorhersage für ein Ereignis E zu tätigen, sondern alle möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiments untereinander abzuwägen, um darunter in der am besten geeignet erscheinenden Weise, die eigenen Wahrscheinlichkeitsempfindungen zu verteilen. Man legt sich nicht auf einen Ausgang eines Ereignisses E fest, sondern verteilt auf alle möglichen Ausgänge seine Empfindungen. So könnte man sagen: Ich glaube zu 15%, dass Schillers Geburtsjahr 1780 ist und zu 85%, dass er in einem anderen Jahr geboren wurde. Wie diese Aussagen genau zu interpretieren sind, wird in den nächsten Kapiteln behandelt. Streng genommen würde eine Verteilung auf mögliche Ausgänge eher von folgender Form sein: Ich glaube zu 15% das Schillers Geburtsjahr 1780 ist, zu 13% dass er 1779 geboren wurde, zu 12% ... usw. Da wir uns jedoch nur dafür interessieren, ob Schiller 1780 geboren wurde oder nicht, sind die genauen Erwartungen innerhalb von $\bar{E}$ für uns nicht von Bedeutung.

Um die Definition von Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E zu erhalten, werden wir zunächst die Definition von Erwartung einer Zufallszahl X betrachten. Der Wert der Zufallszahl X ist ein Einziger und ist ein Element aus $\mathbb{R}$. Da er jedoch als zufällig bezeichnet wird, bedeutet dies, dass der tatsächliche Wert dieser Zahl nicht bekannt ist, dass mindestens zwei Werte für X in Frage kommen. Mit $I(X)$ bezeichnen wir die Menge der für X möglichen Werte. Auch X ist eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und wir schreiben kurz $X = x$ für $X(\omega) = x$. Ein Ereignis E kann somit als Spezialfall einer Zufallszahl betrachtet werden. Auch der Wert eines Ereignisses ist ein Einziger, der entweder 0 oder 1 annimmt. Weiter gilt natürlich $I(E) = \{0, 1\}$ für die Menge der möglichen Werte von E. Eine Teilmenge von $X_i \subset I(X)$ kann als Ereignis E definiert werden, indem man $E = 1$ setzt, sollte ein $x \in X_i$ eintreffen und $E = 0$ sonst.

Beginnen wir nun mit de Finettis Argumentationsgang zur Bestimmung des Glaubensgrades, indem wir zunächst eine Zufallszahl X betrachten, die wir ab sofort auch als *Gewinn* bezeichnen. Auch wenn stets von Gewinn gesprochen wird, werden hier ebenso negative Gewinne, also Verluste in Betracht gezogen. X kann somit sowohl positive als auch negative Werte annhmen. Wir haben den Erwartungswert einer Zufallsgröße X definiert. Die subjektive Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E ist dann die Erwartung der Zufallsgröße, die beim Eintreffen von E den Wert 1 annimmt und sonst 0.
Um eine derartige Quantifizierung vorzunehmen, werden gewisse Messinstrumente benötigt und das zentrale Messinstrument in de Finettis Überlegung ist der Wert des Geldes. Es wird eine Werteinheit benötigt, die für jeden Spieler bzw. für jede Person in jeder Situation den selben

Wert hat. De Finetti ist durchaus klar, dass der Geldwert als Messinstrument problematisch ist, verwendet diesen jedoch trotzdem aus Mangel an brauchbaren Alternativen.

Es wird nun von einer betrachteten Person verlangt einen sicheren, zu X äquivalenten Gewinn $P(X)$ anzugeben, in dem Sinne, dass nach der Präferenzskala dieser Person, "der Zufallsgewinn X einem sicheren Gewinn x vorzuziehen ist oder nicht, je nachdem, ob x größer oder kleiner als $P(X)$ ist" [de Finetti, S.93]. $P(X)$ wird als der Preis von X betrachtet und wird somit derart gewählt, dass dem Spieler letzendlich egal ist, ob er den sicheren Gewinn $P(X)$ erhält oder den für ihn unbekannten Wert X. Gegeben sei also eine Zufallszahl X für die der Spieler einen Wert $P(X)$ wählen muss, allerdings mit dem Wissen, dass er nach der Wahl des Wertes $P(X)$ jede Wette die den Gewinn $c(X - P(X))$ einbringt, eingehen muss, wobei $c \in \{-1, 1\}$ vom Gegner frei gewählt werden kann.

Wenn der Spieler nun einen Preis $P(X)$ einer Zufallszahl X festgelegt hat, so ist diesem egal X mit $P(X)$ auszutauschen. Geht man einen Schritt weiter und betrachtet eine weitere Zufallszahl Y und deren Preis $P(Y)$, so sollte bei der richtigen Wahl von $P(X)$ und $P(Y)$ ebenfalls egal sein, wenn $X + Y$ mit $P(X) + P(Y)$ ausgetauscht wird. Jedoch kann $X + Y$ wiederum als eine Zufallszahl betrachtet werden, so dass nach Definition der zu $X + Y$ äquivalente Gewinn $P(X + Y)$ beträgt. Daraus lässt sich der Schluß ziehen, dass der Preis P Additivität genießen muß:

$$P(X + Y) = P(X) + P(Y). \tag{3.1}$$

Diese Darstellung kann für endlich viele weitere Zufallsvariablen $X, Y, Z, \ldots$ zu $P(X + Y + Z + \ldots) = P(X) + P(Y) + P(Z) + \ldots$ ausgeweitet werden. Die Ausweitung der endlichen Additivität zur $\sigma-$Additivität lehnt de Finetti jedoch grundlegend ab, da dies zu paradoxen Konsequenzen, wie zum Beispiel der Konstruktion von nicht messbaren Vitali-Mengen und damit zum Banach-Tarski Paradoxon führt.
Eine weitere grundlegende Eigenschaft von P ist die Konvexität. Der Preis $P(X)$ einer Zufallszahl X kann nicht kleiner als das kleinste Element und nicht größer als das größte Element aus $I(X)$ sein. Für P gilt somit:

$$infI(X) \leq P(X) \leq supI(X) \tag{3.2}$$

Zu dieser Eigenschaft muss noch hinzugefügt werden, dass X eine zumindest einseitig beschränkte Zufallszahl ist, d.h. das gilt $infI(X) > -\infty$ oder $supI(X) < \infty$. Wie sich später noch zeigen wird sind diese beiden Eigenschaften von P, die Eigenschaft der Additivität und die Eigenschaft der Konvexität, sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingungen für die *Kohärenz*. Wenn man den Zusammenhang, der zwischen Wahrscheinlichkeitsbewertungen und Entscheidungen im Zustand des Ungewissen bestehen sollte, untersuchen will, benötigt man Kriterien die dazu dienen, Wahrscheinlichkeiten zu messen. Mit dem Wort Kohärenz bezeichnen wir Bedingungen, die eingehalten werden sollten, da deren Mißachtung zu Entscheidungen mit eindeutig nicht wünschbaren Folgen führen kann.

Aus diesen beiden Eigenschaften folgt noch eine weitere grundlegende Eigenschaft, nämlich jene der Linearität des Preises P. Sei $a \in \mathbb{R}$ dann ist der für eine Zufallszahl aX faire Preis $P(aX)$. Da in diesem Fall a jedoch nur ein konstanter Faktor ist, gilt für eine Zufallszahl aX ebenfalls $aP(X)$ und damit gilt insgesamt

$$P(aX) = aP(X) \tag{3.3}$$

oder allgemeiner für eine endliche Anzahl von Summanden

$$P(aX + bY + cZ + \dots) = aP(X) + bP(Y) + cP(Z) + \dots \tag{3.4}$$

Für den allgemeinen Fall, in dem X eine Zufallszahl darstellt, die nicht die Bedeutung eines Gewinnes hat, ist die Bezeichnung "Preis von X" nicht mehr passend. Daher ersetzt de Finetti diese Bezeichnung durch "Erwartung von X". Ausserdem spricht er von nun an von der "Wahrscheinlichkeit von X" anstatt von der "Erwartung von X", wenn $X = E$ ein Ereignis bezeichnet.

Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ für das Eintreten eines Ereignis E interpretiert de Finetti als nichts anderes als die *subjektive Erwartung* für E. Wir schreiben dafür auch p_f^E um deutlich hervorzuheben, dass es sich um eine *subjektive Erwartung* für ein Ereignis E handelt. Da im weiteren Verlauf stets eindeutig bestimmt ist, auf welches Ereignis sich p_f^E bezieht, schreiben wir einfacherhalber p_f anstatt p_f^E. Auf die subjektive Erwartung wird im nächsten Abschnitt weiter eingegangen.

Der Ausgang eines zufälligen Ereignisses E ist also ungewiss. Dennoch schenken wir dem Eintreten unterschiedlicher Ereignisse mehr oder weniger Glauben. Selbst wenn das genaue Geburtsjahr Friedrich Schillers nicht bekannt sein sollte, so erscheint es als plausibler oder umgangssprachlich "wahrscheinlicher", dass Friedrich Schiller 1780 geboren wurde und nicht im Jahr 1492. Diese subjektiven Einschätzungen gilt es im folgenden mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit zu induzieren.
Will man nun persönliche Glaubensgrade und Entscheidungen im Zustand des Ungewissen untersuchen, so benötigt man Instrumente bzw. Kriterien, die den Zweck haben, subjektive Wahrscheinlichkeiten zu messen. [1]

3.2 de Finettis Wettspiel

de Finettis bekannter Ansatz ist Glaubensgrade mittels Wettquotienten auszudrücken. Subjektive Wahrscheinlichkeiten werden als *Grad der persönlichen Überzeugung* beschrieben. Wenn wir allerdings nun Wahrscheinlichkeit als persönlichen Grad der Überzeugung eines geeigneten Individuums definieren, bedeutet dies zunächst, dass wir eine große Menge von Wahrscheinlichkeitsinterpretationen erhalten, die sich alle unterscheiden können. Wir erhalten den Glaubensgrad von Person A, den Glaubensgrad von Person B usw. Wir müssen sogar noch eine

Stufe weitergehen und sagen: Wir erhalten den Glaubensgrad von Person A zum Zeitpunkt t_1, Glaubensgrad von A zum Zeitpunkt t_2 usw. Dies führt zu der entscheidenden Frage, wann ein Individuum als geeignet angesehen werden kann?

Man könnte nun zunächst hergehen und keinerlei Beschränkungen setzen. Dies bedeutet jede Person mit jeder Art von Glaubensgraden wäre geeignet. Leider führt dies zu dem Problem, dass persönliche Wahrscheinlichkeiten des öfteren zu inkohärenten Eintscheidungen führen. Wie schon oben angedeutet sind Konvexität und Additivität notwendige und hinreichende Bedingungen für die Kohärenz. Wer hat nicht schon mal Aussagen wie: "Ich bin mir zu 120% sicher, dass ..." getätigt? Eine weniger offensichtliche Verletzung ist jene, dass man dazu neigt die Additivität, zu verletzen. Man schätzt die Einzelwahrscheinlichkeiten für zwei sich gegenseitig ausschließende Ereignisse E, F anders ein, als die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von entweder E oder F und somit wäre $P(E) + P(F) \neq P(E \cup F)$. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, ist eine Person mit derartigen Glaubensgraden anfällig für ein Dutch Book und würde einen sicheren Verlust auf sich nehmen. Keinerlei Einschränkungen an ein geeignetes Individuum, im folgenden als "Spieler" bezeichnet, zu setzen, erscheint somit nicht als sinnvoll. Bruno de Finetti analysiert subjektive Wahrscheinlichkeiten anhand des Wettverhaltens eines repräsentativen Spielers und stellt diesbezüglich folgendes Wettspiel vor:

Nehmen wir an, man startet eine Wette auf ein Ereignis E, in der man verpflichtet ist einen Wettquotienten p, für den man bereit wäre den Besitz einer willkürlichen Geldsumme S zu tauschen, anzugeben. Für den Einsatz pS erhält man im Falle des Eintretens von E den Preis S und für den Fall, dass E nicht eintritt, ist der Einsatz verloren und man bekommt keinen Gewinn gutgeschrieben. Die Frage ist also, welchen Anteil p eines Betrages S man auf ein Ereignis E bereit ist zu setzen, um im tatsächlichen Fall des Eintretens von E die Geldsumme S ausgezahlt zu bekommen. Die Wette für E hat somit folgende grundlegende Form:

E	**Gewinn**
tritt ein	$S - pS$
tritt nicht ein	$-pS$

Betrachten wir diesbezüglich als Beispiel die Frage über den Gewinner der kommenden Fußballweltmeiserschaft. Wir spielen das Spiel, dass derjenige, der sein Geld auf das letzendlich tatsächlich gewinnnende Team gesetzt hat, einen Betrag S=100€ ausgezahlt bekommt. Es stellt sich nun die Frage, bis zu welchem Einsatz pS man bereit wäre, zum Beispiel auf den Gewinn der deutschen Fußballnationalmannschaft (E) zu wetten. An diesem Beispiel wird auch wunderbar deutlich, dass sich Wettquotienten von Spieler zu Spieler unterschiedlich verhalten können. Ein brasilianischer Spieler wird in der Regel nicht bereit sein einen hohen Betrag zu setzten, wie es deutscher Spieler vielleicht wäre. Setzt ein Spieler nun einen Geldbetrag von

$pS = 10€$ (p wäre somit gleich 0.1) auf den Sieg der deutschen Mannschaft, so macht er im Erfolgsfall einen Gewinn von

$$S - pS = 100€ - 10€ = 90€.$$

Sollte die deutsche Nationalmannschaft jedoch an ihrem Vorhaben scheitern, so hat der Spieler einen negativen Gewinn bzw. Verlust zu verkraften:

$$-pS = -10€$$

Selbstverständlich ist der Betrag, dem man bereit wäre auf ein Ereignis E zu setzen, kein eindeutig festgelegter Wert. Viel mehr ist es nachvollziehbar, dass wenn man bereit wäre einen Betrag pS auf ein Ereignis E zu setzen (wir sagen von nun an auch: für einen Betrag eine Wette zu *kaufen*), man auch bereit ist, mit jedem kleineren Wetteinsatz $qS \in [0, pS]$ das Spiel einzugehen. Streng genommen muss man das Intervall $[-\infty, pS]$ betrachten. Ein negativer Wetteinsatz qS entspricht einfach dem Erhalt des Betrages qS. Sieht man sich allerdings in der Rolle des Verkäufers einer Wette wieder, so unterscheiden sich die akzeptablen Einsätze pS von jenem, die der Käufer bereit wäre zu setzen. Da der Verkäufer im Falle des Eintretens von E dem Käufer die Summe S auszuhändigen hat, toleriert er Wetteinsätze qS in dem Bereich $[pS, S]$ bzw. $[pS, \infty]$. Höhere Einsätze sind dem Verkäufer natürlich lieber als niedrigere Einsatze, da er dann im Erfolgsfall von E einen kleineren Verlust erleidet. Für den Verkäufer hat eine Wette somit folgende grundlegende Form:

E	**Gewinn**
tritt ein	$pS - S$
tritt nicht ein	pS

Bruno de Finetti definiert nun den eindeutig festgelegten, *fairen Wettquotienten* p_f für ein Ereignis E als denjenigen Wettquotienten p, für den man eine Wette sowohl als Käufer, als auch als Verkäufer eingehen würde. Der subjektive faire Wettquotient p_f für ein Ereignis E wird dann definiert als die subjektive Erwartung von E und als Wahrscheinlichkeit von E bezeichnet. Von nun an bedeutet $P(E)$ nichts anderes als p_f.

Man könnte damit das Wettspiel auch in der Hinsicht umformulieren, das man sagt: Der Spieler muss für ein Ereignis E einen Wettquotienten p festlegen. Sein Gegenspieler, der im folgenden als *Buchmacher* bezeichnet wird, darf dann entscheiden, welche Position, die des Käufers oder Verkäufers, er zu diesem Wettquotienten p einnehmen will. Die Unsicherheit des Spielers, nicht zu wissen, ob er als Käufer oder Verkäufer agieren wird, führt laut de Finetti zwangsläufig zu zur Setzung eines für den Spieler fairen Wettquotienten p_f.

Da die möglichen Werte, die ein Ereignis E nur annehmen kann $inf I(E) = 0$ und $sup I(E) = 1$ sind, gilt aufgrund der Konvexität für die Wahrscheinlichkeit $0 \leq P(E) \leq 1$, wobei $P(E) = 1$

für das sichere Eintreten des Ereignisses und $P(E) = 0$ für ein unmögliches Ereignis steht. Ruft man sich nun noch die Additivitätseigenschaft vor Augen, so entspricht dies insgesamt den Wahrscheinlichkeitsaxiomen nach Broggi, sprich die Nicht-Negativität, die Normierung und die endliche Additivität.

Sei im folgenden $S = 1$. Damit ist der Einsatz definiert als $p_f 1 = p_f$ und gleich dem Wettquotienten und es lässt sich de Finettis Definition für den Grad des Vertrauens p_f einführen:

Definition (Glaubensgrad)
Der Glaubensgrad oder Grad des Vertrauens (engl. *degree of belief*) für ein Ereignis E ist genau dann p_f, wenn p_f Geldeinheiten der Preis ist, für den man eine Wette die eine Geldeinheit auszahlt, falls E eintritt und nichts auszahlt, falls E nicht eintritt, sowohl kaufen als auch verkaufen würde.

Hier seien noch kurz einige Schwächen dieser Definition angemerkt: de Finetti fordert explizit, dass es genau einen fairen Preis p_f gibt. Es mag eine ganze Reihe von Preisen p_f für ein Ereignis E geben die für den Spieler als fair erscheinen. Auch kann sich die Menge der akzeptablen Kaufpreise einer Wette von der Menge der akzeptablen Verkaufspreise unterscheiden. Die Schnittmenge zwischen Kauf- und Verkaufspreis wäre somit die leere Menge und ein fairer Wettquotient p_f würde erst gar nicht existieren. Der Spieler wäre für diese Wette für keinen Wettquotienten p_f bereit als Käufer und als Verkäufer zu agieren. An späterer Stelle wird auf diese und weitere Kritikpunkte detaillierter eingegangen.

Lassen wir zunächst diese Kritikpunkte ausser Acht und kommen zu de Finettis grundlegenden Hilfsmittel auf dem Weg zur Definition eines rationalen Spielers. [1],[3]

3.3 Dutch Book Argumente

Es wird vom Spieler verlangt, dass er nicht das Verlangen hat Wetten abzuschließen, die für ihn zu einem sicheren Verlust führen. de Finetti bezeichnet daher eine Menge von Wettquotienten eines Spielers als *kohärent*, "wenn unter den Wettquotienten zu deren Annahme du dich (der Spieler) verpflichtet hast, keine sind, welche Gewinne ergeben, die alle uniform negativ sind" [de Finetti, S. 111]. Das heißt unabhängig davon, welches Ereignis eintreffen sollte, verbucht der Spieler einen sicheren Verlust bzw. verbucht sein Gegenspieler der Buchmacher einen sicheren Gewinn. Unter einer Menge von Wettquotienten sind einfach Wettquotienten zu unterschiedlichen Ereignissen (z.B. E, F, $E \cup F$ usw.) zu verstehen. Das Rationalitätskriterium welches besagt, dass ein Spieler einen sicheren Verlust vermeiden soll, wird als *Avoiding Sure Loss* bezeichnet.

Definition (Dutch Book)
Ein Dutch Book gegen einen Spieler ist eine Serie von Wetten, die für den Spieler allesamt akzeptabel sind, ihm allerdings einen sicheren Verlust garantieren, egal welches Ereignis E letzendlich eintrifft.

Woher der Name Dutch Book genau kommt lässt sich nicht mehr genau zurück verfolgen. Allerdings galten zu jener Zeit die niederländischen Buchmacher und Händler als besonders gerissen. Nach de Finetti handelt ein Spieler rational, wenn dieser einen sicheren Verlust bei der Durchführung von Wetten vermeiden will. Dutch Books sind ein Hilfsmittel einer Rechtfertigungsstrategie dafür, dass die Menge der Wettquotienten des Spielers kohärent sind, sollte dieser die Additivität und die Konvexität bzw. die Wahrscheinlichkeitsaxiome nach Broggi nicht verletzen.

Satz 1 (Dutch Book Theorem)
Für eine Menge von Wettquotienten, welche nicht den Anforderungen der Wahrscheinlichkeitsaxiome genügen, gibt es eine Serie von Wetten, welche dem Spieler einen sicheren Verlust garantiert.

Für den Beweis dieses Theorems gehen wir alle möglichen Verletzungen der Wahrscheinlichkeitsaxiome durch:

1. Fall (Verletzung der Nicht - Negativität):
Wir zeigen zunächst, dass die subjektive Wahrscheinlichkeit eines rationalen Spielers nicht größer 1 sein kann und folgern dann daraus die Nicht - Negativität. Angenommen die subjektive Wahrscheinlichkeit p_f (mit $p_f = 1 + q, q \in (0, \infty)$) eines Spielers für ein Ereignis E ist größer 1. Wir betrachten nun Wettquotienten, die sich durch Aussagen wie "Ich bin mir zu 120% sicher, dass es morgen nicht regnen wird!" äussern. In diesem Fall würde der gerissene Buchmacher dem Spieler die Wette für den Einsatz $p_f S > 1$ verkaufen. Für den Fall, dass E nicht eintritt, behält der Buchmacher den Einsatz des Spielers und hat ihm einen Verlust in Höhe seines Einsatzes $p_f S$ zugefügt. Für den Fall, dass E eintritt, muss der Buchmacher dem Spieler zwar 1€ auszahlen, macht allerdings aufgrund dessen Einsatzes von $p_f S > 1$ immernoch einen Gewinn von

$$p_f S - 1 = 1 + q - 1 = q > 0.$$

Die Auszahlungstabelle für den Spieler schaut somit folgendermaßen aus:

E	**Gewinn**
tritt ein	$-q$
tritt nicht ein	$-p_f S$

Der Fall, dass die subjektive Wahrscheinlichkeit p_f (mit $p_f \in (-\infty, 0)$) eines Spielers für ein Ereignis E kleiner als 0 sein sollte verläuft relativ ähnlich. Der Unterschied liegt darin, dass der

Buchmacher dem Spieler nun die Wette nicht verkauft, sondern diese von jener Person abkauft. Das heißt, der Buchmacher kauft die Wette welche ihm im Erfolgsfall von E 1€ und im Falle von $\bar{E}$ 0€ einbringt. Kauft der Buchmacher die Wette nun für den negativen Preis p_f, so zahlt er p_f an den Spieler, sprich der Spieler zahlt an den Buchmacher $|p_f|$. Im Falle von E erhält der Buchmacher zusätzlich zu seinem sicheren Gewinn $|p_f|$ noch 1€. Für den Spieler gestaltet sich die Lage also folgendermaßen:

E	**Gewinn**
tritt ein	$-(1+\|p_f\|)$
tritt nicht ein	$-\|p_f\|$

2. Fall (Verletzung der Normierung):
Angenommen der Wettquotient eines Spielers für eine Tautologie E, d.h. für ein Ereignis das immer eintrifft, ist ungleich 1. Der Fall, dass $P(E) > 1$ ist, ist ein Sonderfall des obigen 1. Falles. Betrachten wir folglich den Fall $p_f < 1$, mit $p_f = 1 - q, q \in (0, \infty)$. In diesem Fall kauft der clevere Buchmacher vom Spieler die Wette für den Einsatz p_f. Für den Fall, dass sogar $p_f < 0$ gilt, würde der Buchmacher beim 'Kauf' der Wette, wieder Geld erhalten. Da E eine Tautologie ist und immer eintritt, wird der Spieler dem Buchmacher auf jedenfall 1€ auszahlen müssen, so dass der Buchmacher einen sicheren Gewinn von $1 - p_f = 1 - (1 - q) = q > 0$ auf Kosten des Spielers verbuchen kann. Für den Spieler gilt somit:

E	**Gewinn**
tritt ein	$-q$

3. Fall (Verletzung der (σ-)Additivität):
Wir betrachten zunächst das Dutch Book Argument für den endlichen Fall. Sei in diesem Fall die Additivität für zwei sich gegenseitig ausschließende Ereignisse E_1, E_2 verletzt. Das heißt, es gilt $P(E_1 \cup E_2) \neq P(E_1) + P(E_2)$ und damit entweder

$$P(E_1 \cup E_2) > P(E_1) + P(E_2) \text{ oder } P(E_1 \cup E_2) < P(E_1) + P(E_2).$$

Betrachten wir zunächst den Fall $P(E_1 \cup E_2) < P(E_1) + P(E_2)$.
In diesem Fall würde ein Buchmacher die Wetten für E_1 und E_2 zum Preis der jeweiligen fairen Wettquotienten $P(E_1)$ und $P(E_2)$ des Spielers verkaufen. Das heißt im Falle des Eintretens von E_1 oder E_2 würde der Buchmacher 1€ an den Spieler auszahlen. Weiter würde der Buchmacher sich allerdings vom Spieler die Wette für das Eintreten von E_1 oder E_2 zum Wettquotienten $P(E_1 \cup E_2)$ verkaufen lassen. Das bedeutet, der Spieler zahlt dem Buchmacher im Falle des Eintretens von E_1 oder E_2 1€ aus. Der Buchmacher hat sich mit dieser Serie von Wetten einen Gewinn von

$$P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2) > 0$$

gesichert, denn egal welches Ereignis nun eintreten sollte, der Buchmacher behält die Differenz von $P(E_1) + P(E_2)$ und $P(E_1 \cup E_2)$ ein. Die folgende Auszahlungstabelle verdeutlicht die schlechte Lage des Spielers:

E1	**E2**	**Gewinn**
tritt ein	tritt nicht ein	$1 - P(E_1) - P(E_2) + P(E_1 \cup E_2) - 1$
tritt nicht ein	tritt ein	$1 - P(E_1) - P(E_2) + P(E_1 \cup E_2) - 1$
tritt nicht ein	tritt nicht ein	$-P(E_1) - P(E_2) + P(E_1 \cup E_2)$

Für den den Fall $P(E_1 \cup E_2) > P(E_1) + P(E_2)$ dreht der Buchmacher das Spiel einfach um, indem er vom Spieler die Wetten für die Ereignisse E_1 und E_2 abkauft und dem Spieler die Wette für das Ereignis E_1 oder E_2 wiederum verkauft. In diesem Fall ergibt sich für den Spieler folgende verlustbringende Auszahlungstabelle:

E1	**E2**	**Gewinn**
tritt ein	tritt nicht ein	$1 + P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2) - 1$
tritt nicht ein	tritt ein	$1 + P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2) - 1$
tritt nicht ein	tritt nicht ein	$P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2)$

Auch wenn de Finetti die σ-Additivität strikt ablehnte, so kann man mittels der Dutch Book Argumentation zeigen, dass auch eine Verletzung der σ-Additivität zum Abschluss von Wetten führen kann die dem Spieler einen sicheren Verlust einbringen. Gehen wir also einen Schritt weiter und betrachten den σ-additiven Fall. Auch hier ist der Spieler anfällig für ein Dutch Book, sollten seine Glaubensgrade für abzählbar viele paarweise disjunkte Ereignisse $E_i, i \in \mathbb{N}$ die σ-Additivität verletzen. Es gilt dann $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \neq \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$ und somit

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) > \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) \text{ oder } P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) < \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) < \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$. In diesem Fall könnte ein Dutch Book so ausschauen, dass ein cleverer Buchmacher die Wetten der Einzelereignisse zum jeweils fairen Wettquotienten $P(E_i), i \in \mathbb{N}$ verkauft und die Wette für das Auftreten eines der paarweise disjunkten Ereignisse für den fairen Wettquotienten $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$ vom Spieler abkauft. Mit der Abwicklung dieser Wetten hat der Buchmacher wieder einen sicheren Gewinn in Höhe von

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) - P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) > 0$$

verbucht. Da auch diesmal beide Parteien wiederum auf dieselben möglichen Ausgänge gewettet haben kann man sich den sicheren Verlust des Spielers wie im endlichen additiven Fall ähnlich leicht klar machen. Sollte zum Beispiel das Ereignis E_1 eintreffen, so zahlt der Buchmacher zwar 1€ an den Spieler, erhält von diesem jedoch wiederum für seine abgekaufte Wette 1€. Der

Buchmacher behält letzendlich die Differenz $\sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) - P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) > 0$.

An dieser Stelle sei noch vermerkt, dass es sich insbesondere bei der Dutch Book Argumentation für den σ-additiven Fall um ein reines Gedankenmodell handelt und ein Dutch Book rein theoretisch ist. Die Gefahr eines tatsächlichen Verlustes ist in diesem Zusammenhang schlicht nicht gegeben, da es unmöglich ist eine unendliche Anzahl von Wetten durchzuführen und abzuschließen. Auch kann eine oftmals auf den abzählbar unendlich paarweise disjunkten Einzelereignissen intuitive Gleichverteilungsannahme nicht angenommen werden, da dies für $P(E_i) > 0, i \in \mathbb{N}$ gegen das erste Warhscheinlichkeitsaxiom verstoßen würde. Die Wahrscheinlichkeiten für die Einzelereignisse $P(E_i)$ müssen somit aus den Summanden einer aus ausschließlich positiven Summanden bestehenden konvergenten Reihe bestehen, dessen Grenzwert kleiner gleich 1 ist.

Alle Wetten, die für jedes einzelne Axiom gemacht wurden erscheinen dem Spieler als fair, fügen ihm jedoch einen sicheren Verlust zu. Es wird hieraus geschlussfolgert, dass die Glaubensgrade eines rationalen Spielers den Axiomen Broggis genügen müssen. Nach de Finetti erfüllen dadurch die subjektiven Glaubensgrade eines rationalen Spielers genauso das mathematische Kalkül wie die objektivistische Interpretation. [1],[3]

3.4 Ein ausführliches Beispiel

Betrachten wir zum endlich additiven Fall folgendes Beispiel: Angenommen es soll auf den Ausgang der nächsten Bundestagswahlen gewettet werden oder konkreter es wird gewettet welche Partei(en) die neue Bundesregierung stellen wird. Die subjektive Wahrscheinlichkeit des Spielers für das Ereignis CCS := Die nächste Bundesregierung wird von der CDU/CSU und der SPD gebildet, beträgt $P(CCS) = 0.5$. Die persönliche Einschätzung des Spielers für das Ereignis SG := Die nächste Bundesregierung wird von der SPD und den Grünen gebildet, beträgt $P(SG) = 0.2$. Die subjektive Wahrscheinlichkeit, dass die nächste Bundesregierung entweder die große Koalition (CCS) oder Rot/Grün sein wird beträgt $p(CSS \cup SG) = 0.9$. In diesem Fall wäre die Additivität verletzt, da

$$P(CCS \cup SG) > P(CCS) + P(SG)$$

Ein cleverer Buchmacher könnte den Spieler hier in ein Dutch Book verwickeln, indem er nun vom Spieler zum Einen die Wetten für die Ereignisse CSS zum Preis von 0.50€ und SG zum Preis von 0.20€ einzeln abkauft. Sollte der Fall eintreten, dass die nächste Bundesregierung entweder aus einem Schwarz-Roten Bündnis oder Rot-Grünen Bündnis bestehen sollte, bekommt der Buchmacher vom Spieler somit 1€ ausgezahlt. Sollte die kommende Bundesregierung weder Schwarz/Rot noch Rot/Grün sein ist der Einsatz des Buchmachers verloren. Zum Anderen kann der Buchmacher die Wette, dass entweder Schwarz/Rot oder Rot/Grün die nächste Regierung bilden wird an den Spieler für den Preis von 0.90€ verkaufen. Damit hat der Buchmacher auf jeden Fall einen Gewinn von

$$P(CCS \cup SG) - P(CSS) - P(SG) = 0.90€\ -0.50€\ -0.20€ = 0.20€$$

sicher. Für den Fall, dass die nächste Bundesregierung tätsächlich wieder von der CDU/CSU und der SPD gebildet werden sollte, muss der Buchmacher zwar 1€an den Spieler für das Eintreten des Ereignisses CCS zahlen, bekommt von diesem allerdings ebenso 1€ ausgezahlt, da das Ereignis $CCS \vee SG$ eingetreten ist. Analog verläuft es für das Eintreten von SG. Für den dritten denkbaren Fall, dass weder die Große Koalition noch Rot/Grün Deutschland regieren sollten, bekommen weder Spieler noch Buchmacher 1€ ausgezahlt. Auch hier verzeichnet der Buchmacher somit einen Gewinn von 0.2€. Für den Spieler sähe die Auszahlungstabelle damit folgendermaßen aus:

CCS	**SG**	**Gewinn**
tritt ein	tritt nicht ein	$1 + P(CCS) + P(SG) - P(CCS \cup SG) - 1 = -0.2$
tritt nicht ein	tritt ein	$1 + P(CCS) + P(SG) - P(CCS \cup ESG) - 1 = -0.2$
tritt nicht ein	tritt nicht ein	$P(CCS) + P(SG) - P(CCS \cup SG) = -0.2$

3.5 Das Converse Dutch Book Theorem

Das Dutch Book Theorem besagt, dass ein Spieler anfällig für ein Dutch Book ist, sollten seine Glaubensgrade die broggi'schen und auch kolmogorov'schen Wahrscheinlichkeitsaxiome nicht einhalten. Es existiert daher eine Reihe von Wetten, welche dem Spieler einen sicheren Verlust zufügen, egal welches Ereignis letzendlich eintreten sollte. Eine nicht minder wichtige Erkenntnis ist die Aussage des Converse Dutch Book Theorems, welches von Lehman und Kemeny bewiesen wurde:

Satz 2 (Converse Dutch Book Theorem)
Für eine Menge von Wettquotienten welche die Wahrscheinlichkeitsaxiome einhalten, gibt es keine Serie von Wetten, welche einen sicheren Verlust (Gewinn) garantiert.

Das Converse Dutch Book Theorem garantiert einem Spieler, dessen Wettquotienten die Wahrscheinlichkeitsaxiome einhalten, nicht anfällig auf ein Dutch Book sein zu können. Es gibt somit keine Serie von Wetten, die zu einem sicheren Verlust führen. Ein Spieler, welcher sich an die Wahrscheinlichkeitsaxiome hält, vermeidet einen sicheren Verlust. Allerdings sollte diese Aussage nicht in der Hinsicht missverstanden werden dass gar kein Verlust mehr möglich ist. Es folgt somit, dass die Additivität und die Konvexität, die de Finetti eingangs als grundlegende Eigenschaften von P eingeführt hatte, tatsächlich ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Kohärenz darstellt.

Das Dutch Book Argument nimmt an, dass der Glaubensgrad eines Spielers für ein Ereignis E verbunden ist mit dessen Wettquotienten. Glaubensgrade, welche die Wahrscheinlichkeitsaxiome verletzen, sind folglich anfällig für ein System von Wetten, in dem zwar jede einzelne Wette

vom Spieler als fair betrachtet wird, im Ganzen jedoch zu einem sicheren Verlust führt. Man kommt somit zusammen mit dem Converse Dutch Book Theorem zu dem Ergebnis, dass die Glaubensgrade eines rationalen Spielers die Wahrscheinlichkeitsaxiome befolgen sollten und das es aus dem selben Grund irrational wäre die Wahrscheinlichkeitsaxiome nicht zu befolgen.
Auf Basis dieses Ergebnisses könnte man Kohärenz nach de Finetti ebenfalls folgendermaßen definieren:

Definition (Kohärenz/Inkohärenz)
Ein Spieler, dessen Glaubensgrade anfällig für ein Dutch Book sind, heißt *inkohärent*.
Ein Spieler, dessen Glaubensgrade nicht anfällig für ein Dutch Book sind, heißt *kohärent*.

Zusammen mit dem Dutch Book Theorem bedeutet Kohärenz somit nicht anderes als die Einhaltung der Wahrscheinlichkeitsaxiome. Genauso bedeutet Inkohärenz, dass die Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie verletzt werden. Subjektive Wahrscheinlichkeiten lassen sich somit laut de Finetti definieren als die fairen Wettquotienten kohärenter Spieler.

An dieser Stelle sei noch erwähnt, dass bei de Finettis Wahrscheinlichkeitsinterpretation Kohärenz sich ausschließlich auf das Avoiding Sure Loss Rationalitätskriterium beschränkt. Wenn man wie Peter Walley subjektive Intervallwahrscheinlichleiten betrachtet, so fallen Kohärenz und Avoiding Sure Loss nicht exakt zusammen. Walley betrachtet keine eindeutig festgelegten (Punkt-) Wahrscheinlichkeiten wie de Finetti sondern Intervallwahrscheinlichkeiten, wobei er mit $\underline{\mathrm{P}}(E)$ die untere Wahrscheinlichkeitsgrenze, auch untere Prävision genannt, und mit $\bar{\mathrm{P}}(E)$ die obere Wahrscheinlichkeitsgrenze, obere Prävision, bezeichnet. Für Zufallszahlen $X_1, \ldots, X_n$ kann man zeigen, dass eine untere Prävision genau dann sicheren Verlust vermeidet, wenn gilt:

$$sup(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \underline{\mathrm{P}}(X_i)) > 0 \tag{3.5}$$

Die Kohärenz ist bei Walley ein sehr viel stärkeres Kriterium.

$$sup(\textstyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \underline{\mathrm{P}}(X_i)) - m(X_0 - P(X_0)) > 0, \text{ für alle } m, n \in \mathbb{N}$$

Man beachte, dass man für $m = 0$ die obige Relation (3.5) erhält. Untere Prävisionen sind dann kohärent, wenn das Supremum der jeweiligen Kaufpreise $\underline{\mathrm{P}}(X_i)$ für Zufallszahlen bzw. Wettspielen das Supremum einer weiteren Zufallszahl nicht impliziert.

Ein Kritikpunkt, den sich de Finettis Dutch Book Argumentation gefallen lassen muss ist jener, dass ein rationaler Spieler nicht zwangsläufig mit seinen fairen Wettquotienten spielen muss. Gibt es nicht einen Unterschied zwischen den Glaubensgraden eines rationalen Spielers und den Quotienten mit welchen er bereit wäre eine Wette einzugehen? Könnte es nicht sein, dass ein Spieler zwar klare subjektive Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten eines Ereignisses E besitzt, jedoch nicht bereit ist anhand des entsprechenden Wettquotienten eine Wette einzugehen? de Finetti kontert diesen Einwand mit Hilfe seines Schemas der Strafpunkte. [3],[9]

3.6 Das Schema der Strafpunkte

In der Dutch Book Argumentation, steckt als entscheidende Voraussetzung die Annahme, dass der Spieler seine subjektiven Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse durch seine rationalen Wettquotienten zum Ausdruck bringt. Die hierbei entstehende Kritik, ein rationaler Spieler müsse nicht zwangsläufig seine subjektiven Wahrscheinlichkeiten als Wettquotienten setzen, entgegnet de Finetti mittels seines "Schema der Strafpunkte". In der Strafpunktmethode sieht de Finetti eine Methode diesen Kritikpunkt zu umgehen. Es wird sich herausstellen, dass ein Spieler sich rational verhält, falls er im Spiel seine subjektiven Erwartungen setzt anstatt eines beliebigen anderen Wertes x. Im folgenden Absatz nehmen wir den Glaubensgrad p eines Spielers für ein Ereignis E als bekannt voraus. Weiter ist $x \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Wert, mit dem der Spieler anstatt seiner Erwartung p ein Spiel beschreitet. Es wird sich am Ende herausstellen, dass sich der zu erwartende Verlust minimieren wird, sollte der Spieler $x = p$ wählen.

Der Spieler ist bei dieser Vorgehensweise verpflichtet sich für einen Wert $x \in \mathbb{R}$ festzulegen, der sich von seiner subjektiven Wahrscheinlichkeit p für ein Ereignis E unterscheiden kann. Weiterhin wird der Spieler darüber informiert Strafpunkte zu erhalten, die sich erhöhen, je weiter er bei seiner Festlegung x vom eintretenden Ergebnis $E = 1$ oder $E = 0$ entfernt ist. Die Strafpunkte werden bestimmt duch folgende Funktion

$$\begin{aligned} L_x &:= (E - x)^2 \\ &= x^2 + (1 - 2x)E \end{aligned}$$

Der Spieler ist selbstverständlich bestrebt seine Strafpunkte zu minimieren. Es sei daran erinnert, dass E nur die Werte "1" oder "0" annehmen kann und somit $E^2 = E$ gilt. Würde man auf das Ereignis "Deutschland gewinnt die kommende Fußballweltmeisterschaft" den Wert 0.7 setzen, so erhielte man im Erfolgsfall von Löws Team $L_{0.7} = (1 - 0.7)^2 = 0.09$ Strafpunkte und im Falle des Scheiterns der Nationalmannschaft $L_{0.7} = (0 - 0.7)^2 = 0.14$ Strafpunkte. Diese Straffunktion lässt sich alternativ auch darstellen als

$$L_x = (1 - x)^2 E + x^2(1 - E) \tag{3.6}$$

Es lässt sich einfach nachprüfen, dass diese Darstellung gleich der obigen ist, wenn man sich $E = E^2$, für $E = 1 = wahr$ oder $E = 0 = falsch$, bewusst macht. Damit folgt dann:

$$\begin{aligned} L_x &= (E - x)^2 \\ &= E^2 - 2Ex + x^2 \\ &= E - 2Ex + x^2 \\ &= E - 2Ex + x^2E - x^2E + x^2 \\ &= (1 - x)^2 E + x^2(1 - E) \end{aligned}$$

Die zweite Darstellung ist insbesondere in der Hinsicht nützlich, da aus ihr sofort ersichtlich wird, dass L_x entweder den Wert x^2 oder $(1 - x)^2$ annimmt, je nachdem, ob E wahr oder falsch

ist.
Eine dritte nützliche und alternative Darstellung der Straffunktion ist

$$L_x = E(1-p) + (p-x)^2 + (E-p)(p-2x) \tag{3.7}$$

wobei p zunächst eine beliebige Zahl sei. Auch diese Gleichheit zu obigen Darstellungen lässt sich durch einfaches ausmultiplizieren zeigen:

$$\begin{aligned} L_x &= E(1-p) + (p-x)^2 + (E-p)(p-2x) \\ &= E - Ep + p^2 - 2px + x^2 + Ep - 2Ex - p^2 + 2px \\ &= x^2 - 2Ex + E \\ &= x^2 - 2Ex + E^2 \\ &= (E-x)^2 \end{aligned}$$

Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass mit $P(E)$ die (subjektive) Erwartung p für ein Ereignis E bezeichnet wird. Definieren wir $P(L_x)$ als Funktion die vom Wert x und der Wahrscheinlichkeit p abhängt und bezeichen $P(L_x) = L_x(p)$. Wir erhalten daher mit Hilfe der Linearität von P folgende Darstellung der obigen Gleichungen:

$$L_x(p) := P(L_x) \tag{3.8}$$
$$= x^2 + (1-2x)p \tag{3.9}$$
$$= x^2(1-p) + (1-x)^2 p \tag{3.10}$$
$$= p(1-p) + (p-x)^2 \tag{3.11}$$

Der Beweis erfolgt durch schlichtes nachrechnen:

$$\begin{aligned} L_x(p) &= P(x^2 + (1-2x)E) \\ &= x^2 + P((1-2x)E) \\ &= x^2 + (1-2x)P(E) \\ &= x^2 + (1-2x)p \end{aligned}$$

Aus diesem Ergebnis und den oben gezeigten Äquivalenzen folgenden dann auch die anderen beiden Darstellungen von $L_x(p)$.

Für ein festes x ergibt sich somit eine lineare Funktion $L_x(p)$, wie man aus Darstellung (3.4) sehr schön ablesen kann. Aus Darstellung (3.5) erkennt man leicht, dass $L_x(0) = x^2$ und $L_x(1) = (1-x)^2$ gilt und man erhält für ein festes x eine lineare Funktion mit den Randpunkten x^2 und $(1-x)^2$. Abbildung 3.1 visualisiert für $x \in \{0, 0.15, 0.25, 0.35, 0.5, 0.65, 0.75, 0.85, 1\}$ die zu erwarteten Strafpunkte $L_x(p)$.

Man lasse sich vom ersten Eindruck nicht täuschen. Es handelt sich in diesen Plot tatsächlich

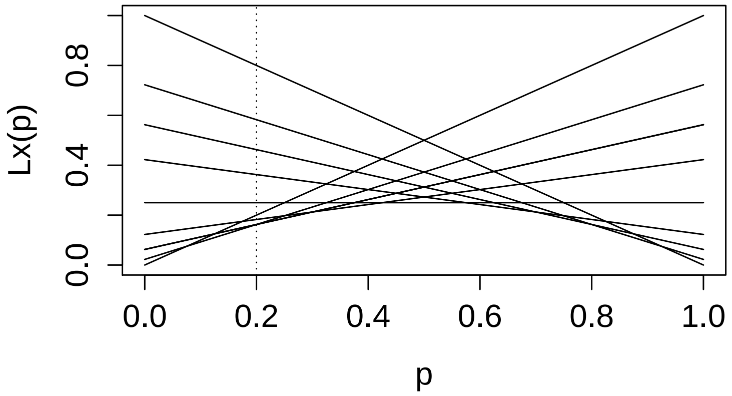

Abbildung 3.1: Erwartete Strafpunkte p für $x \in \{0, 0.15, 0.25, 0.35, 0.5, 0.65, 0.75, 0.85, 1\}$

um neun lineare Funktionen. Man sieht ausserdem anhand dieses Bildes sehr schön, dass die Geraden die Tangenten zur Parabel $f(p) = p(1-p)$ bilden. Aus dem Plot ist es zudem ersichtlich, dass, sollte der Spieler mit seinem Glaubensgrad p (im Beispiel $p = 0.2$) ein Spiel beschreiten, dies nach Erwartung die geringste Strafpunktzahl liefert.

Je weiter der Wert x sich vom Glaubensgrad p unterscheidet, desto größer fällt auch der zu erwartende Schaden aus. Den geringsten Wert für festes p liefert $L_p(p) = p(1-p)$. Jedes $x \neq p$ liefert, wie man auch anhand Darstellung (3.6) sehr schön sieht, zusätzliche Strafpunkte $(p-x)^2$. Die lineare Funktion $L_x(p)$ wird in die Summe von $p(1-p)$ (Parabel f) und $(p-x)^2$ (Abweichung von p=x) geteilt. Graphisch wird dieser Fall deutlich, wenn man für einen festen Glaubensgrad p (in der Abbildung für $p = 0.2$) und der unterschiedlichen Wahl von x, die zu erwartenden Strafpunkte betrachtet. Die minimale zu erwartende Strafpunktzahl liefert die Straffunktion, die die Parabel f tangiert. Dies ist stets L_p. Hat man das Ziel, seine Strafpunkte zu minimieren, so sollte $x = p$ gewählt werden. Ein Spieler verringert mittels dieser Methode die zu erwartenden Strafpunkte, sollte er im Spiel seinen Glaubensgrad setzen. [1]

Kapitel 4

Diachronische Dutch Book Argumente

4.1 Das Prinzip der Konditionalisierung

Im Folgenden wird auf einen weiteren fundamentalen Einwand eingegangen, der sich bei lediglicher Betrachtung einfacher Dutch Book Argumenten ergibt: kohärente faire Wettquotienten im bisherigen Sinne sind noch lange nicht rational im Sinne von *wahrheitsorientiert*. Dies bedeutet, die reale Erfolgshäufigkeit eines Ereignisses E wird duch de Finettis Rechtfertigung überhaupt nicht berücksichtigt. Betrachten wir diesbezüglich einen Spieler dessen fairer Wettquotient für das Ereignis "eine 1 beim Wurf eines handelsüblichen Würfels" bei $p_f = \frac{1}{2}$ liegt. Dieser Spieler hat somit kein Problem 0.5€ auf das Eintreten einer 1 beim nächsten Wurf zu setzen und würde selbst nach mehrmaligem durchführen dieser Wette keinen Fehler in seinem Handeln erkennen, auch wenn er Stück für Stück sein Geld verliert. Am Ende kann er sich nicht erklären, weshalb ausgerechnet er sein Geld verloren und der Buchmacher Gewinn um Gewinn verbucht hat. Die Wahrscheinlichkeitsaxiome liefern somit nur ein notwendiges, jedoch bei weitem noch kein hinreichendes Kriterium für rationale Glaubensgrade, da sie zu schwach sind, um irrationales Wettverhalten auszuschließen. Subjektive Wahrscheinlichkeiten besitzen deshalb bislang noch keinen *intrinsischen* Bezug zu statistischen Wahrscheinlichkeiten. Aus diesem Grund wird ein weiteres "Axiom" betrachtet. Das Prinzip der Konditionalisierung.

Mittels Dutch Books wird nun ebenfalls versucht, Regeln für die Veränderung von Glaubensgraden im Laufe der Zeit bzw. durch Hinzunahme von weiteren Informationen oder Belegen A_i, zu rechttferitgen. Durch den Erhalt einer neuen Information A_i kann sich der Glaubensgrad für das Eintreten eines Ereignisses E folgendermaßen entwicheln:

$$\begin{array}{rcl} P(E \mid A_i) & > & P(E), \text{ d.h. } A_i \text{ bestätigt } E \\ P(E \mid A_i) & = & P(E), \text{ d.h. } A_i \text{ ist neutral bzgl. } E \\ P(E \mid A_i) & < & P(E), \text{ d.h. } A_i \text{ schwächt } E \end{array}$$

Der erste Fall bedeutet, dass bedingt auf A_i mein Glaubensgrad für E gestiegen ist. Durch Erhalt der Information A_i hat sich meine Zuversicht, dass $E = 1$ tatsächlich eintrifft erhöht und hat somit meinen Glaubensgrad für das Eintreten von E verändert. Die anderen zwei Fälle erklären sich damit von selbst.

Im vorherigen Kapitel wurden ausschließlich Wetten betrachtet, die ein Spieler zu einem einzigen Zeitpunkt eingeht. Um die Konditionalisierung mit Hilfe von Dutch Book Argumente zu rechtfertigen müssen wir einen Schritt weiter gehen und ein System von Wetten betrachten, bei dem der Spieler zu einem ersten Zeitpunkt t_1 auf Wetten eingeht und zu einem späteren Zeitpunkt t_2 weitere Wettangebote akzeptiert. Es wird nun gezeigt, dass ein Spieler nur dann rational handelt, wenn er seine Überzeugungen bei Erhalt von einer neuen Information A_i gemäß Konditionalisierung anpasst. Die Menge aller möglichen Informationen soll dabei in Gestalt einer Partition $(A_1, \ldots, A_n)$ darstellbar sein. Sei P_1 der *Priori-Glaubensgrad* und stehe P_2 für den neuen Glaubensgrad nach Erhalt der Information A_i (*Posteriori-Glaubensgrad*). Mittels der Annahme $P_1(A_i) > 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ betrachten wir zunächst das Bayes Theorem, einer Konsequenz der Wahrscheinlichkeitsaxiome:

$$P_1(E \mid A_i) = \frac{P_1(A_i \mid E)P_1(E)}{P_1(A_i)}. \tag{4.1}$$

Das Bayes Theorem ist ein Gesetz der Wahrscheinlichkeitstheorie, allerdings erlangt es große erkenntnistheoretische Bedeutung, bringt man es in Zusammenhang mit dem Prinzip der Konditionalisierung:

$$P_2(E) = P_1(E \mid A_i) = \frac{P_1(A_i \mid E)P_1(E)}{P_1(A_i)} \tag{4.2}$$

Das Prinzip der Konditionalisierung besagt, dass ein rationaler Spieler mit einer Priori Wahrscheinlichkeit P_1 für eine Hypothese E, welcher in Besitz der Erkenntnis A_i kommt, diese Information in seine neue oder Posteriori Wahrscheinlichkeit P_2 einfließen lassen soll. Ein rationaler Spieler sollte demzufolge seinen Glaubensgrad an eine neue Informationen A_i anpassen. Schätzt ein Spieler zum Beispiel a priori eine Münze als fair ein und erhält nach 100 Würfen 90 mal das Ergebnis Kopf und 10 mal Zahl, so sollte er seine a priori Einschätzung besser überdenken. Hierbei handelt es sich um ein zentrales Prinzip im Subjektivismus. Sollte ein Spieler die Regel der Konditionalisierung verletzen, sprich es gilt $P_2(E) > P_1(E \mid A_i)$ oder $P_2(E) < P_1(E \mid A_i)$, so ist er auch in diesem Fall anfällig für ein Dutch Book und handelt folglich nicht rational.

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $P_2(E) < P_1(E \mid A_i)$ und damit

$$q := P_1(E \mid A_i) - P_2(E) > 0.$$

Ein cleverer Buchmacher kann in diesem Fall dem Spieler einen sicheren Verlust zufügen, indem er ihm zum Zeitpunkt t_1 zunächst folgende, für den Spieler allesamt akzeptabele Wetten, verkauft:

Wette 1 mit Einsatz $\mathbf{P_1(E \cap A_i)}$

1€	falls $E \cap A_i$ eintritt
0€	sonst

Wette 2 mit Einsatz $\mathbf{P_1(E \mid A_i)P_1(\bar{A}_i)}$

$P_1(E \mid A_i)$€	falls $\bar{A}_i$ eintritt
0€	sonst

Wette 3 mit Einsatz $\mathbf{[P_1(E \mid A_i) - P_2(E)]P_1(A_i)}$

$P_1(E \mid A_i)$€$-P_2(E)$€	falls A_i eintritt
0€	sonst

Für den Fall, dass A_i nicht eintreffen sollte, hat der Buchmacher bereits einen sicheren Gewinn verbucht und beendet das Wettspiel an dieser Stelle. Sollte jedoch A_i eintreffen, so kauft der Buchmacher dem Spieler noch folgende vierte Wette ab:

Wette 4 mit Einsatz $\mathbf{P_2(E)}$

1€	falls E eintritt
0€	sonst

Es sei an dieser Stelle vermerkt, dass es sich bei den Wetten 2 und 3 nicht um Wetten mit einem möglichen Gewinn S von 1€ handelt, sondern von $P_1(E \mid A_i)$€ bzw. $P_1(E \mid A_i)$€$-P_2(E)$€. Der für den Spieler faire Wettquotient p_f ist in Wette 2 $P_1(\bar{A}_i)$ und in Wette 3 $P_1(A_i)$ und der faire Einsatz $p_f S$ ergibt sich damit als $P_1(E \mid A_i)P_1(\bar{A}_i)$ bzw. $[P_1(E \mid A_i) - P_2(E)]P_1(A_i)$. Die Annahme vom linearen Nutzen, also dass der Spieler egal wie groß oder klein der mögliche Gewinn auch sein mag, stets mit dem selben Wettquotienten spielt, wird hier stillschweigend angenommen.

Bei diesen vier Wetten handelt es sich um ein Dutch Book. Obwohl der Spieler jede Wette zu einem fairen Wettquotienten gekauft bzw. verkauft hat, wird er am Ende einen sicheren Verlust erleiden. Betrachten wir zunächst nur die ersten drei Wetten. Bis zu diesem Zeitpunkt erhält der Buchmacher Wetteinsätze im Wert von

$$P_1(E \cap A_i) + P_1(E \mid A_i)P_1(\bar{A}_i) + [P_1(E \mid A_i) - P_2(E)]P_1(A_i)$$

Sollte A_i nicht eintreten, so erhält der Buchmacher nach Abschluss dieser Wetten einen sicheren Gewinn von $[P_1(E \mid A_i) - P_2(E)]P_1(A_i) = qP_1(A_i) > 0$. Er muss aufgrund der verlorenen Wette 2 zwar $P_1(E \mid A_i)$€ an den Spieler aushändigen, es bleiben ihm jedoch immernoch

$$
\begin{aligned}
& P_1(E\cap A_i)+P_1(E\mid A_i)P_1(\bar{A}_i)+[P_1(E\mid A_i)-P_2(E)]P_1(A_i)-P_1(E\mid A_i)\\
= \;& P_1(E\cap A_i)+P_1(E\mid A_i)P_1(\bar{A}_i)+P_1(E\mid A_i)P_1(A_i)-P_2(E)P_1(A_i)-P_1(E\mid A_i)\\
= \;& P_1(E\cap A_i)+P_1(E\mid A_i)[P_1(\bar{A}_i)+P_1(A_i)]-P_2(E)P_1(A_i)-P_1(E\mid A_i)\\
= \;& P_1(E\cap A_i)+P_1(E\mid A_i)-P_2(E)P_1(A_i)-P_1(E\mid A_i)\\
= \;& P_1(E\cap A_i)-P_2(E)P_1(A_i)\\
= \;& P_1(E\mid A_i)P_1(A_i)-P_2(E)P_1(A_i)\\
= \;& [P_1(E\mid A_i)-P_2(E)]P_1(A_i)\\
= \;& qP_1(A_i)>0
\end{aligned}
$$

Sollte sich das Ereignis A_i jedoch als richtig erweisen, so kauft der Buchmacher dem Spieler die vierte Wette ab und verzeichnet je nach Eintreten von E oder $\bar{E}$ einen sicheren Gewinn. Das dem so sein muss, lässt sich bei näherer Betrachtung der Wetten 1 und 4 nachvollziehen. Bei diesen beiden Wetten handelt es sich um ein Dutch Book auf Ereignis E, im klassischen Sinne. Der Buchmacher kauft dem Spieler die Wette für das Ereignis E für den geringen Preis $P_2(E)$ (Wette 4) ab und verkauft dem Spieler die selbige Wette für einen höhrern Preis $P_1(E \mid A_i)$ (Wette 1). Beim Eintreten von E muss jeder der beiden Seiten dem jeweils Anderen 1€ auszahlen, so dass hierbei kein Profit für eine Partei entsteht. Der Buchmacher hat jedoch aufgrund des kleineren Kaufpreises einen sicheren Gewinn verbucht. Betrachtet man den Gewinn des Buchmachers im genauen, so macht dieser beim Eintreten von E insgesamt einen sicheren Gewinn von

$$
\begin{aligned}
& P_1(E\cap A_i)+P_1(E\mid A_i)P_1(\bar{A}_i)+[P_1(E\mid A_i)-P_2(E)]P_1(A_i)+1\\
- \;& P_2(E)-(P_1(E\mid A_i)-P_2(E))-1\\
= \;& P_1(E\cap A_i)+P_1(E\mid A_i)[P_1(\bar{A}_i)+P_1(A_i)]-P_2(E)P_1(A_i)-P_2(E)-P_1(E\mid A_i)+P_2(E)\\
= \;& P_1(E\cap A_i)+P_1(E\mid A_i)-P_2(E)P_1(A_i)-P_2(E)-P_1(E\mid A_i)+P_2(E)\\
= \;& P_1(E\mid A_i)P_1(A_i)-P_2(E)P_1(A_i)\\
= \;& [P_1(E\mid A_i)-P_2(E)]P_1(A_i)\\
= \;& qP_1(A_i)>0
\end{aligned}
$$

Sollte das Eintreten von E ausbleiben ergibt sich die selbe Rechnung mit dem Unterschied, dass das gegenseitige Aushändigen von jeweils 1€ unberücksichtigt bleibt. Der Fall $P_2(E) > P_1(E \mid A_i)$ lässt sich vollkommen analog zeigen, indem man einfach die Wettrichtungen umdreht. Die Glaubensgrade eines Spielers, welche die Regel der Konditionalisierung nicht befolgen sind nachgewiesener Maßen anfällig für ein Dutch Book und somit nicht kohärent.

Es sei an dieser Stelle noch erwähnt, dass sich mit Hilfe von Dutch Book Argumenten noch weitere Prinzipien des Subjektivismuses begründen lassen. Die bekanntesten sind die *Jeffrey Konditionalisierung* und das auf van Fraassen zurückgehende *Reflektionsprinzip*.
Das Prinzip der Jeffrey Konditionalisierung ist eine verallgemeintere Form der Konditionalisierungsregel, die allerdings noch unsichere Belege A_i berücksichtigt. Für eine endliche Partition $(A_1, \ldots, A_n)$ von möglichen Informationen, mit $P(A_i) > 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ lautet die Regel der Jeffrey Konditionalisierung:

$$P_2(E) = \sum_{i=1}^{n} P_1(E \mid A_i) P_2(A_i)$$

Das Prinzip der Reflektion hat folgende Form:

$$P_1(E \mid P_2(E) = p) = p$$

Das Prinzip besagt, dass, sollte ich momentan glauben, zu einem späteren Zeitpunkt ein Ereignis E mit Wahrscheinlichkeit p zu bewerten, so sollte meine bedingte Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis E bezüglich meiner zukünftigen Bewertung $P_2(E) = p$, schon zum momentanen Zeitpunkt gleich p sein. Da bei diesen beiden Prinzipien die Dutch Book Argmunetation allerdings nicht mehr auf Bruno de Finetti, sondern auf Brian Skyrms bzw. Bas van Fraassen zurück zu führen sind, wird an dieser Stelle auf eine genaue Darstellung der Argumentation verzichtet. [3]

4.2 Kritikpunkte zum Dutch Book Argument

Manche Kritikpunkte an der Dutch Book Argumnetation sind so alt wie die Argumentation selbst. Es kann zum Bespiel bezweifelt werden, dass ein derartig cleverer Buchmacher, der einen irrationalen Spieler gnadenlos ausbeutet überhaupt existiert. Wie soll ein Buchmacher inkohärente Glaubensgrade eines Spielers erkennen und sie zu dessen Nachteil verwenden?
Ein weiterer Einwand: Warum sollte ein rationaler Spieler eine Wette eingehen, dessen erwarteter Gewinn bei 0€ liegt? Werden Wetten nicht grundsätzlich dann eingegangen, wenn der Spieler einen Gewinn tendenziell für *wahrscheinlicher* hält als einen Verlust? Handelt es sich tatsächlich um ein rationales Individuum, wenn es Wetten eingeht, die grundsätzlich keinen erwarteten Gewinn versprechen? Zu diesen Kritikpunkten lässt sich sagen, dass es sich bei der Dutch Book Argumentation nur um ein Gedankenmodell zur Quantifizierung von subjektiven

Wahrscheinlichkeiten handelt. de Finetti war selbstverständlich klar, dass es sich hierbei nur um ein Hilfswerkzeug handelt, um Glaubensgrade mit Wahrscheinlichkeiten induzieren zu können.

Weiterhin könnte man anmerken, dass ein eindeutig bestimmter Wettquotient, wie er bei der Dutch Book Argumentation angenommen wird, gar nicht existiern mag. Ein Spieler kann für ein Ereignis gar keinen Wettquotienten oder auch andersherum, eine ganze Reihe von Wettquotienten als fair betrachten. Die Schnittmenge für die ein Spieler bereit wäre eine Wette einzugehen kann zum einen leer sein: Es gibt keinen Preis für den er eine Wette sowohl kaufen als auch verkaufen würde. Sein gerade noch akzeptabler Kaufspreis liegt zum Beispiel bei $p = 0.4$ wohingegen sein minimaler Verkaufspreis bei $p = 0.6$ liegt.
Die Idee den zweiten Fall näher zu betrachten, es gäbe eine Reihe von fairen Wettquotienten, sprich ein Intervall $[a, b]$ von fairen Kauf- und Verkaufspreisen, geht auf Peter Walley zurück. Er schlägt zur Behandlung dieses Problems unpräzise Wahrscheinlichkeiten vor, welche gegenüber de Finettis Konzept eine wesentliche Verallgemeinerung liefern. Der Wettquotient a wäre in diesem Sinne die untere Grenze, für die ein Spieler noch bereit wäre eine Wette zu verkaufen. Anderherum stellt b die obere Grenze dar, für die der Kauf einer bestimmten Wette noch als akzeptabel erscheint.

In den Wetten 2 und 3 des diachronischen Dutch Books wurde auf andere mögliche Gewinne gespielt, als es bei den Wetten 1 und 4 der Fall war. Die Annahme, die hier gemacht wurde ist, dass sich der Zusammenhang zwischen Auszahlungsbetrag und subjektivem Nutzen als lineare Funktion darstellen lässt. Dies entspricht jedoch in keinster Weise der Realität und stellt ein Problem in dieser Argumentationskette dar! Ein Spieler mag bereit sein für einen verhälnismäßig großen Wettquotienten eine Wette einzugehen, die im Erfolgsfall 1€ einbringt, sich jedoch weigern mit den selben Wettquotienten eine Wette einzugehen, die im Erfolgsfall 1000€ verspricht. Ein Spieler mag zum Beispiel bereit sein auf die Wette, die beim Sieg der deutschen Nationalmannschaft im Endrundentunier in Brasilien 1€ auszahlt, 0.70€ zu wetten. Dies entspricht einem Wettquotienten und damit Glaubensgrad von $p_f = 0.7$. Handelt es sich jedoch um dieselbe Wette, mit dem Unterschied, dass im Fall des Weltmeistertitels 1000€ ausgezahlt werden, so könnte der Spieler plötzlich nicht mehr bereit sein, mit dem Wettquotienten 0.7 die Wette einzugehen. In diesem Fall wäre ein Einsatz von 700€ nötig.

In der Dutch Book Begründung für die Konditionalisierung wurde eine weitere kritische Annahme getroffen. Die Menge der möglichen Informationen sollte in einer *endlichen* Partition $(A_1, \ldots, A_n)$ mit $P(A_i) > 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ darstellbar sein. Mit dieser Bedingung wird von vornherein festgeschrieben, dass die Menge aller möglichen neuen Erfahrungen endlich und noch wichtiger, schon bestimmt ist. Warum ist diese Annahme problematisch? Betrachten wir dazu wieder die äußerst wichtige Frage, ob es Deutschland dieses Jahr endlich wieder schafft, den Weltmeistertitel an sich zu reissen. Sollte ich im Zuge der Vorbereitung auf das Tunier ein Spiel der Nationalmannschaft betrachten, so kann mein Glaube an den Titel je nach Sieg oder Niederlage wachsen oder sinken. Das Problem ist, dass ich nach Betrachtung eines Spieles nicht nur das Ergebnis an Erkenntnis gewonnen habe, sondern bei intensiver Verfolgung noch weitere Schlüsse ziehe. Es macht einen Unterschied gegen wen und vor allem wie ein Spiel absolviert würde. Ein knapper Sieg gegen einen Fußballzwerg lässt die Zuversicht sicherlich nicht unbedingt wachsen, wohingegen ein souveräner Erfolg gegen einen Mitkonkurrenten auf den Titel den Glaube an ein Sommermärchen weiter entfacht. Eine banale Partition { Deutschland gewinnt ; Deutschland verliert } ist damit nicht sinnvoll. Mann könnte nun natürlich argumentieren eine genauere Partition { Deutschland gewinnt gegen Aussenseiter ; Deutschland verliert gegen Aussenseiter ; Deutschland gewinnt gegen Mitfavoriten, Deutschland verliert gegen Mitfavoriten } zu betrachten, jedoch ist die Menge an denkbaren Informationen in diesem Fall unerschöpflich. Ein zentraler Spieler kann sich verletzen, andere Mannschaften können schwächeln, Brasilien erwartet eine Rekordhitze usw. Es scheint klar, dass die Einteilung in Partitionen an kein Ende kommt.

Dies sind nur einige von vielen weiteren Kritikpunkten, die sich Dutch Books gefallen lassen müssen. Man sieht, dass mittels Dutch Books bis heute eine wirklich zu hundert Prozent zufriedenstellende Rechtfertigung noch nicht erbracht wurde und vielleicht auch nie erbracht wird. Das Schema der Strafpunkte erscheint zunächst wie ein vielversprechender alternativer Ansatz, fundamentiert jedoch zu sehr auf der willkürlich gewählten Straffunktion $L_x(p)$. Alles in allem ist jedoch de Finettis Überzeugung Wahrscheinlichkeiten mittels Glaubensgrade darzustellen eine interessante und sinnvolle Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, die es verdient betrachtet und diskutiert zu werden. [3],[8]

Literaturverzeichnis

[1] BRUNO DE FINETTI: *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 1981, Oldenburg Verlag GmbH, München.

[2] WILLIAM TALBOTT: *Bayesian Epistemology*, 2008, Stanford Encyclopedia of Philosophy

[3] SUSAN VINEBERG: *Dutch Book Arguments*, 2011, Stanford Encyclopedia of Philosophy

[4] ALAN HAYEK: *Interpretations of Probability*, 2011, Stanford Encyclopedia of Philosophy

[5] FULVIA DE FINETTI: *Bruno de Finetti, an Italian on the border*, 2011, STUDIA Universitätsverlag, Innsbruck

[6] GERHARD SCHURZ: *Wahrscheinlichkeit und unsicheres Schließen*, 2005, *https://www.phil-fak.uni-duesseldorf.de/fileadmin/Redaktion/Institute/Philosophie/Theoretische$_P$hilosophie/Schurz/scripts/WahrscheinlichkeitSkriptum.pdf*

[7] BARTHOLOMÄUS BÖHM: *Statistik ohne Statistik*, 2011, epubli GmbH, Berlin

[8] MARTIN RECHENAUER: *Was taugen dynamische Dutch Book Argumente?*, 1996, *http://www.philosophie.uni-muenchen.de/lehreinheiten/philosophie_4/dokumente/dutch_b_argum.pdf*

[9] PETER WALLEY: *Statistical reasoning with imprecise probabilities* , 1991, Chapman and Hall, London, New York