Aufgabe 1

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_n) = 0$ "für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge

$$S_k = \frac{\exp(\lambda(X_1 + \ldots + X_k))}{(\mathbb{E}(\exp(\lambda X_1)))^k}$$

ein Martingal ist.

Aufgabe 2

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter nicht negativer Zufallsvariablen mit existierendem Erwartungswert. Bildet die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

ein (Sub-/Super-)Martignal oder überhaupt keines?

Aufgabe 3

Beweisen Sie Satz 12.4.3. aus der Vorlesung.

Satz 12.4.3
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen aus $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $0 < a_n \nearrow \infty$ eine Folge reeller Zahlen mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2}\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$, dann folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n} \sum_{I=1}^{n} (X_i - \mathbb{E}(X_i \,|X_{i-1}, \ldots, X_1)) \right) = 0 \quad P\text{-}f.s.$$

Aufgabe 4

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben bezüglich einer monoton wachsenden Folge von Sub-σ-Algebren $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei T eine Stoppzeit. Betrachtet wird das Mengensystem

$$\mathcal{A}_T = \{A \in \mathcal{A} : A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{A}_n \text{ für alle } n\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_T$ eine σ-Algebra ist.

(ii) Sei S eine weitere Stoppzeit mit $S \leq T$. Zeigen Sie, dass dann $A_S \subset A_T$.

(iii) Zeigen Sie, dass T und X_T $\mathcal{A}_T$ - messbar sind.