Aufgabe 1

Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung:

Satz 13.11
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise unkorrelierter Zufallsvariabler mit $\mathbb{E}(X_n) = 0$ und $\mathbb{V}(X_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist zudem (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen, für welche gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{{a_n}^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) = 0$$

so folgt

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \ ,$$

d.h. die Folge $\left(\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert stochastisch gegen* 0.

Aufgabe 2

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 13.11. Zeigen Sie, dass die Bedingung von Satz 13.11 mit $a_n = n$ erfüllt ist, wenn die Zufallsvariablen identisch verteilt sind.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass der Satz von de Moivre-Laplace ein Spezialfall des Satzes von Lindeberg-Feller ist.

Satz von de Moivre Laplace:
Für jede Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig identisch verteilter, quadratisch integrierbarer reeller Zufallsvariablen mit Streuung $\sigma > 0$ konvergiert die Folge der Verteilung $P_{\tilde{X}_n}$ von

$$\tilde{X}_n \ = \ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \mathbb{E}(X_j))$$

schwach gegen die Standardnormalverteilung.