

Aufgabe 1

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(Y_i) = 0$. Setze

$$X_n = \sum_{j=1}^n Y_j \quad .$$

Beweisen Sie, dass in diesem Fall gilt:

$$\mathbb{E}_P(X_n | X_1, \dots, X_{n-1}) = X_{n-1} \quad P\text{-f.s.}$$

Aufgabe 2

Seien (Ω, \mathcal{A}) , $(\Omega'_1, \mathcal{A}'_1)$ und $(\Omega'_2, \mathcal{A}'_2)$ Messräume. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{A}) . Seien

$$X_1 : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega'_1, \mathcal{A}'_1)$$

$$X_2 : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega'_2, \mathcal{A}'_2)$$

stochastisch unabhängige Zufallsvariablen. Sei

$$\varphi : \Omega'_1 \times \Omega'_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $\mathcal{A}'_1 \otimes \mathcal{A}'_2$ -messbare Funktion, so dass

$$\varphi \circ \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P) \quad ,$$

sowie

$$\begin{aligned} \psi_1 : \Omega'_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x_1 &\longmapsto \mathbb{E}_P(\varphi(x_1, X_2)) = \int_{\Omega} \varphi(x_1, X_2(\omega)) P(d\omega) \quad . \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}_P(\varphi(X_1, X_2) | X_1) = \psi_1 \circ X_1 \quad .$$

Aufgabe 3

Sei f eine Riemann-integrierbare und g eine stetig differenzierbare Funktion jeweils auf $[a; b]$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_a^b f dg = \int_a^b fg' dx \quad .$$