Aufgabe 1

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $C \in \mathcal{A}$ und

$$\mathcal{C} \;=\; \sigma(C) \quad .$$

Was ist dann

$$\mathbb{E}\big[X \big| \mathcal{C}\big]$$

für $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$?

Aufgabe 2

Seien X und Y zwei reelle Zufallsvariablen, welche die 2-dimensionale Standard-Normalverteilung $\mu_{\rho,\sigma} = f\,\lambda^2$ mit $\rho \in (-1,1)$ und $\sigma > 0$ besitzen:

$$f(x,y) := \frac{(1-\rho^2)^{1/2}}{2\pi\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\big(x^2 - 2\rho xy + y^2\big)\right)$$

Wie sieht die bedingte Dichtefunktion $f(x|y)$ aus? Beweisen Sie, dass

$$\mathbb{E}\big[X \big| Y\big] = \rho Y \quad .$$

Aufgabe 3

Es sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{B}^2$. π_1 bzw. π_2 bezeichne die kanonische Projektion $(x,y) \mapsto x$ bzw. y von $\mathbb{R}$ auf die x- bzw. y-Achse. Die Bildmaße $\pi_1(\mu)$ bzw. $\pi_2(\mu)$ heißen dann Marginalmaße von μ.

Man zeige, dass aus der Existenz einer Wahrscheinlichkeitsdichte f für μ die Existenz einer Wahrscheinlichkeitsdichte für jeder der beiden Marginalmaße folgt und gebe die Dichten an.

Hinweis: Die Randdichte ist gekennzeichnet durch: $f_R(y) = \int f(x,y)\,dx$.

Aufgabe 4

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei

$$C_n \in \mathcal{A} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

sodass $C_n \cap C_m = \emptyset$ für $n \neq m$ und

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$$

Sei $\mathcal{C}$ die von $C_1, C_2, C_3, \ldots$ erzeugte σ-Algebra. Sei $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Wie sieht dann $\mathbb{E}_P\big[X \big| \mathcal{C}\big]$ aus?