Aufgabe 1

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega_1', \mathcal{A}_1)$, $(\Omega_2', \mathcal{A}_2')$ Messräume. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Sei

$$X_1 \ : \ \Omega \ \to \ \Omega_1'$$

eine $\mathcal{A}/\mathcal{A}_1'$ - messbare Zufallsvariable und sei

$$X_2 \ : \ \Omega \ \to \ \Omega_2'$$

eine $\mathcal{A}/\mathcal{A}_2'$ - messbare Zufallsvariable. Setze

$$X \ : \ \Omega \ \to \ \Omega_1 \times \Omega_2 \, , \quad \omega \ \mapsto \ \big(X_1(\omega), X_2(\omega)\big)$$

Dann gilt: X_1 und X_2 sind stochastisch unabhängig, genau dann wenn

$$X(P) \ = \ \big[X_1(P)\big] \otimes \big[X_2(P)\big]$$

Aufgabe 2

Für $i \in \{1, \dots, n\}$ sei P_i ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit Lebesgue-Dichte f_i. Dann ist

$$f \ : \ \mathbb{R}^n \ \to \ \mathbb{R} \, , \quad (x_1, \dots, x_n) \ \mapsto \ f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$$

eine Lebesgue-Dichte von $P_1 \otimes \cdots \otimes P_n$ auf $\mathbb{R}^n$, das heißt

$$d\big(P_1 \otimes \cdots \otimes P_n\big) \ = \ f \, d\lambda^n$$

Aufgabe 3

Seien μ, ν zwei Maße auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume, wobei μ_1 und μ_2 σ-endlich sind. Es gelte

$$\mu(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = \mu_1(\mathcal{A}_1) \cdot \mu_2(\mathcal{A}_2)$$

und

$$\nu(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = \mu_1(\mathcal{A}_1) \cdot \mu_2(\mathcal{A}_2)$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Eindeutigkeitssatzes (Satz 3.9), dass

$$\mu = \nu$$

Aufgabe 4

Man betrachte die beiden Maßräume $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, wobei $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathfrak{B}$, $\mu_1 = \lambda$ und $\mu_2 = \sharp$ (nicht σ-endliches Zählmaß auf $\mathfrak{B}$). Man zeige, dass für die Diagonale $D = \{(\omega, \omega) \in \mathbb{R}\}$ von $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \Omega_1 \times \Omega_2$ die Gleichheit

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} I_D(\omega_1, \omega_2) \, \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} I_D(\omega_1, \omega_2) \, \mu_1(d\omega_1) \mu_2(d\omega_2)$$

nicht gilt.