Aufgabe 1

Man zeige, dass das Dirac-Maß δ_x keine Dichte bezüglich λ besitzen kann.

Aufgabe 2

Sei $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ein Messraum und $F \ : \ x \mapsto F(x)$ mit

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{32}x & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{16}x^2 & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{8}x + \frac{1}{4} & 2 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

Sei P das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit Verteilungsfunktion F, d.h. $F(x) = P((-\infty, x]))$. Bestimmen Sie die Dichte von P bzgl.

$$\mu = \lambda + \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_4 \quad .$$

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:

Satz 8.6 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien*

$$X_1 \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P), \quad X_2 \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P), \quad \ldots, \quad X_n \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

stochastisch unabhängige Zufallsvariablen. Dann ist

$$\mathbb{E}_P\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}_P[X_i] \tag{1}$$

und

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Var}\big(X_i\big) \ . \tag{2}$$

Aufgabe 4

Gegeben seien zwei Messräume $(\Omega_i, \mathcal{A}_i), i = 1, 2$, wobei

$$\sharp(\Omega_1) = m_1 < \infty \quad \text{und} \quad \sharp(\Omega_2) = m_2 < \infty$$

gelte. Man zeige, dass die von allen Mengen $A_1 \times A_2$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i$ erzeugte σ-Algebra in $\Omega_1 \times \Omega_2$ aus denjenigen Mengen besteht, welche die Vereinigung jeweils endlich vieler Mengen der Form, $A_1 \times A_2, A_i \in \mathcal{A}_i$ sind.