Aufgabe 1

Sind Ω_1, Ω_2 Mengen und ist $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ eine Abbildung, so bezeichnet man für $A \subset \Omega_1$ mit

$$f(A) := \{f(\omega) : \omega \in A\}$$

das *Bild* von A unter der Abbildung f und mit

$$f^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega_1 : f(\omega) \in B\}$$

das *Urbild* von $B \subset \Omega_2$. Sei I eine Indexmenge und $B, B_i \subset \Omega_2, i \in I$ beliebige Teilmengen. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Relationen

(1)
$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i),$$

(2)
$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i),$$

(3)
$$f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c.$$

Aufgabe 2

Seien Ω_1, Ω_2 Mengen und $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ eine Abbildung und $\mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra auf $\Omega_i, i = 1, 2$. Zeigen Sie

(1) $f(\mathcal{A}_1) := \{B \subset \mathcal{A}_2 : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$ ist eine σ-Algebra auf Ω_2,

(2) $f^{-1}(\mathcal{A}_2) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{A}_2\}$ ist eine σ-Algebra auf Ω_1.

Aufgabe 3

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Man beweise folgende Eigenschaften von Maßen:

(1) *Endliche Additivität: Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien $A_1 \in \mathcal{A}, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ so dass $A_i \cap A_j = \emptyset$ (für $i \neq j$). Dann ist*

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$$

(2) *Isotonie:*

$$A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A}, \quad A \subset B \qquad \Rightarrow \qquad \mu(A) \ \leq \ \mu(B)$$

(3) *Subtraktivität:*

$$A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A},\ \ A \subset B,\ \ \mu(A) < \infty \qquad \Rightarrow \qquad \mu(B \setminus A) \ = \ \mu(B) - \mu(A)$$

(4) *Sub-Additivität:*

$$\big(A_n\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \qquad \Rightarrow \qquad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(6) *Stetigkeit von oben: Sei*

$$\big(A_n\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}\,; \qquad A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathcal{A}$$

wobei $\mu(A_n) < \infty \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$. *Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

Aufgabe 4

Man beweise, das *Dirac-Maß* in Ω ein Maß ist.

Aufgabe 5

Sei $\mathcal{A}_n := \sigma(\{\{1\},\{2\},\ldots\{n\},\{\Omega\}\}$ eine σ-Algebra auf einer nichtabzählbaren Menge Ω. Man beweise, dass

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A}_n &\longrightarrow [0;\infty] \\ A &\longmapsto \begin{cases} 0, & A \text{ abzählbar,} \\ 1, & A^c \text{ abzählbar} \end{cases} \end{aligned}$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A}_n)$ ist.